Calcul algébrique et calcul littéral

Chapitre 1

0-Pour bien commencer, vocabulaire de base

L'ensemble de tous les nombres que l'on connaît en seconde est appelé l'ensemble des nombres réels.

On note $\mathbb{R}$ cet ensemble.

Par exemple, les nombres : -3,4 ; $\frac{2}{3}$; 8 ; π ; $\sqrt{2}$ sont quelques exemples de nombres réels.

En algèbre : dire qu'un nombre réel a est nul signifie que $a = 0$

Dire qu'un nombre réel x n'est pas nul signifie que $x \neq 0$ est différent de

♥ *La somme* de deux termes est *le résultat de* l'addition de ces deux termes. ♥

Par exemple : $8 + 7 = 15$. 8 et 7 sont les termes de cette somme.

$x + y + 15$ est une somme de trois termes respectivement égaux à x, y et 15. Cette dernière ne se réduit pas davantage !

L'addition est *commutative*, c'est-à-dire que l'ordre dans lequel les termes sont additionnés n'a pas d'importance.

Pour tous réels a et b, on a donc : ♥ $\boxed{a + b = b + a}$. ♥

Exemple

Calculer astucieusement, sans calculatrice : $23 + 48 + 37 + 32$. $= \underbrace{23+37}_{60} + \underbrace{48+32}_{80} = 140$

Définition

Soit x un réel. L'opposé du réel x est le nombre qui additionné avec x donne une somme nulle.

Ainsi, ♥ **l'opposé de x est le nombre $-x$** ♥ car : $x + (-x) = 0$.

Par exemple, l'opposé de 4,31 est -4,31

Enfin, l'opposé de l'opposé de x, c'est-à-dire $-(-x)$ est égal à x. On a : $\boxed{-(-x) = x}$.

L'opposé de -7,58 est 7,58

Définition

Soient a et b deux réels. Soustraire le réel b au réel a, c'est-à-dire effectuer l'opération : $a - b$, revient à additionner au réel a l'opposé du réel b.

$a - b = a + (-b)$.

La soustraction n'est donc en fait qu'une addition particulière !

♥ **Le résultat de la soustraction** est communément appelé la différence ♥

Par exemple, $2 - 3 = 2 + (-3) = -1$.

Considérons l'expression : $7+(-x)$: la parenthèse est obligatoire et évite le chevauchement d'un signe + -.

💣 Ecrire $7+-x$ constitue une erreur d'écriture.

En pratique, on utilisera la notation $7 - x$ plutôt que $7+(-x)$, la première écriture évitant les parenthèses ! En algèbre, on utilisera le moins de symboles possibles pour alléger les écritures et en faciliter la lecture.

💣 Attention la soustraction n'est pas commutative !

Par exemple : $5-7 = -2$ tandis que $7-5 = 2$.

💣 L'ordre des termes dans une soustraction est donc fondamental.

Taper la séquence : -5,2−7,61+15,264 −(-2,81), et donner le résultat affiché par votre calculatrice : 5,264

Définition

♥ ***Le produit*** **de deux facteurs est le** ***résultat de la*** multiplication **de ces facteurs ♥:**

Par exemple : $3\times8 = 24$: 3 et 8 sont les facteurs de ce produit qui est égal à 24

$-5a = -5\times a$; $7{,}2xy = 7{,}2\times x\times y$

Remarque : dans les deux exemples précédents, on ne met pas le signe de la multiplication entre -5 et a d'une part pour le premier exemple, et pour le second exemple, pas de signe multiplié entre 7,2 et x, et pas de signe multiplié entre x et y : ceci est purement conventionnel, le but est d'alléger les écritures qui contiennent moins de caractères, ce procédé est fréquent en algèbre.

Le développement des mathématiques, et en particulier du calcul algébrique, a été considérable grâce à de tels allégements dans les écritures.

Exemple

Soient a, b et c des nombres réels. $-2abc$ est un produit de quatre facteurs, et : $-2abc = -2\times a\times b\times c$

Soit a un nombre réel quelconque. Rappelez la signification des expressions suivantes :

$4a = 4\times a$; $-a = -1\times a$; $\boxed{a^2 = a\times a}$; $3(a+5) = 3\times(a+5)$

a^2 est appelé le carré du nombre a

💣💣 Le carré d'un nombre a, ce n'est pas pareil que le double de a !! 💣💣 $a^2 \neq 2a$ en règle générale !

Par exemple, $8^2 = 64$ tandis que $8\times2 = 16$, donc $8^2 \neq 8\times2$

Même si le produit est commutatif (c'est-à-dire que pour tous réels *a et b*, $ab = ba$), ne pas écrire $a4$ au lieu de $4a$! *On met systématiquement, dans un produit de facteurs, le nombre avant la lettre !*

Enfin, pour tout réel a : $\boxed{1a = a}$: multiplier par 1 un nombre ne change pas la valeur de ce dernier.

Ce dernier point peut paraître ridicule, mais ce sera une astuce classiquement utilisée dans le paragraphe suivant concernant les factorisations !

Exemple : Simplifier les écritures :

$3x \times 2y =$ $6xy$

$5x \times (-8y) \times 7 =$ $-280xy$

$(3a)^2 =$ $9a^2$

$3a$ le tout au carré

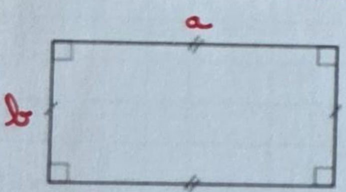
Conclusion : $(3a)^2 \neq 3a^2$: par $(3a)^2$ le carré s'applique au nombre $3a$ tandis que par $3a^2$, le carré ne s'applique qu'au nombre a.

Comment se simplifie l'expression $(-a)^2$? Pourquoi ?

$(-a)^2 = (-1) \times a \times (-1) \times a = \underbrace{(-1) \times (-1)}_{1} \times \underbrace{a \times a}_{a^2} = a^2$

Quelques formules algébriques d'usage courant contenant des produits (et à mémoriser par cœur ♥) :

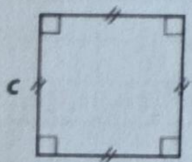
A – *Les périmètres* (=longueur du contour)



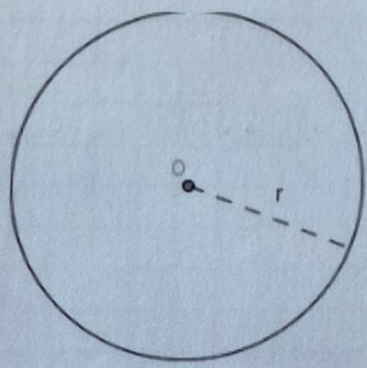
Un rectangle de longueur a et de largeur b a pour périmètre P avec :

♥♥ $P = 2a + 2b$

$P = 2(a+b)$



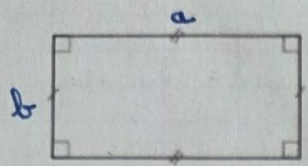
Un carré de côté c a pour périmètre P avec : ♥♥ P = $4c$



Un cercle de rayon r a pour périmètre P avec : ♥♥ P = $2\pi r = \pi d$

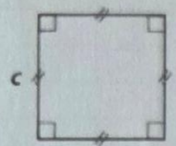
ou $\pi \simeq 3,14$

B – *Les aires* (=*surfaces*)

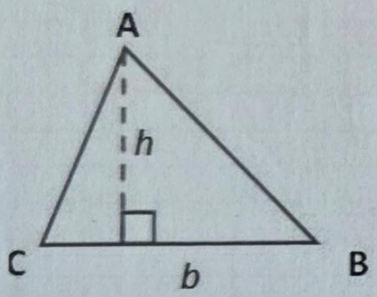


Un rectangle de longueur a et de largeur b a pour aire $\mathcal{A}$ avec :

♥♥ $\mathcal{A} = ab$ = longueur × largeur

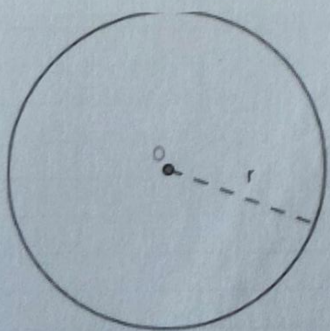


Un carré de côté c a pour aire $\mathcal{A}$ avec : ♥♥ $\mathcal{A} = c^2$



Un triangle de base b et de hauteur h a pour aire $\mathcal{A}$ avec :

♥♥ $\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2} = \frac{bh}{2}$



Un disque de rayon r a pour aire $\mathcal{A}$ avec : ♥♥ $\mathcal{A} = \pi r^2$

Enfin, terminons ces rappels par des expressions chiffrées d'usage fréquent en algèbre :

Le double d'un nombre réel a est le nombre $2a$.

Le triple d'un nombre réel a est le nombre $3a$.

La moitié d'un nombre réel a est le nombre $\frac{a}{2}$ ou encore $0{,}5a$

Le tiers d'un nombre réel a est le nombre $\frac{a}{3}$

Le quart d'un nombre réel a est le nombre $\frac{a}{4}$

Ainsi de suite, le dixième du réel a est le nombre $\frac{a}{10}$, le trentième du réel a est le nombre $\frac{a}{30}$, le centième du réel a est le nombre $\frac{a}{100}$, le millième du réel a est le nombre $\frac{a}{1000}$

Exercice 1

a et b désignent des nombres réels quelconques.

Ecrire algébriquement l'expression correspondante à chacune des phrases suivantes :

a) La somme des réels 7 et de la moitié de 18. $7 + \frac{18}{2}$

b) la somme du double de a et du triple de b. $2a + 3b$

c) le produit des réels 7, a et b. $7ab$

d) le produit du tiers de a par le double de b. $\frac{a}{3} \times 2b$

e) La différence de l'opposé de a et du carré de a. $-a - a^2$

f) La somme des carrés des réels a et b. $a^2 + b^2$

g) Le carré de la somme des réels a et b. $(a+b)^2$

I-Rappels sur les transformations d'écriture

Définition

♥ ***Développer*** un produit de facteurs signifie le transformer en une somme ♥

Pour ce faire, on dispose des règles suivantes :

Règle de (simple) distributivité *de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction :*

Quels que soient les réels k, a et b, on a :

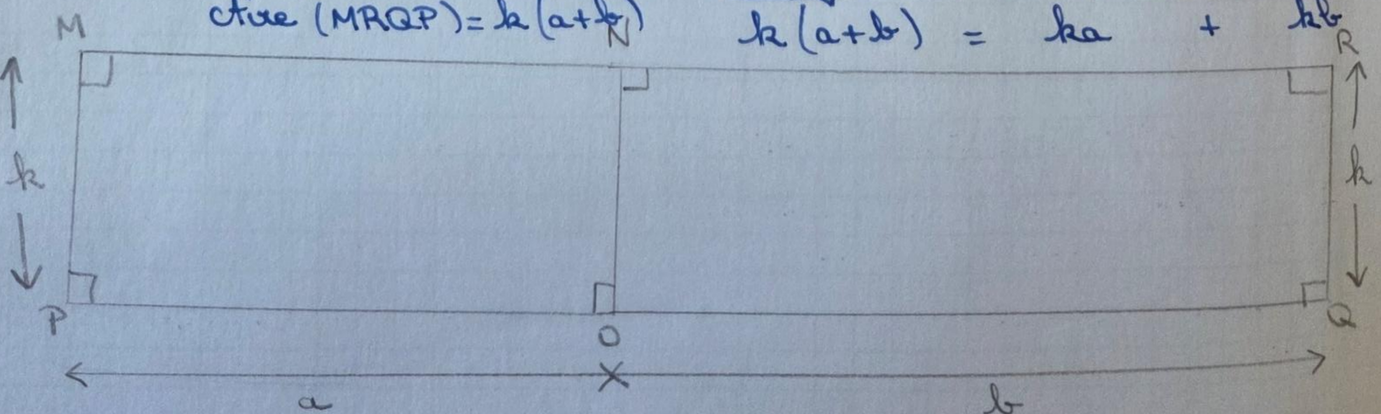
♥♥ $k(a+b) = ka + kb$ ♥♥ et ♥♥ $k(a-b) = ka - kb$ ♥♥

Géométriquement, ces règles se comprennent aisément :

Illustration : Aire (MNOP) = ka
Aire (NRQO) = kb
Aire (MRQP) = $k(a+b)$

Par suite, comme :

$$\underbrace{\text{Aire (MRQP)}}_{k(a+b)} = \underbrace{\text{Aire (MNOP)}}_{ka} + \underbrace{\text{Aire (NRQO)}}_{kb}$$



Exemples

Développer et réduire chacune des expressions suivantes :

$3(x + 5y) = 3x + 15$

$-2(x - 3y) = -2x + 6y$

$7(2x - 7y + 3z - 4) = 14x - 49y + 21z - 28$

Calculer mentalement : 24×7, **puis** 54×11, **et enfin** 16×98.

$24 \times 7 = 168$
$54 \times 11 = 594$
$16 \times 98 = 1668$
$45 \times 23 = 1035$

Règle de double distributivité

♥♥ **Pour tous réels** a, b, c **et** d, **on a :** $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Preuve **: Découle de la règle précédente !**

Exemples

Développer et réduire chacune des expressions suivantes :

$(2x + 3)(x + 7) = 2x \times x + 2x \times 7 + 3x + 3 \times 7 = 2x^2 + 14x + 3x + 21 = 2x^2 + 17x + 21$

$(3x - 4)(2x + 1) = 6x^2 + 3x - 8x - 4 = 6x^2 - 5x - 4$

$3 - (2x - 1)(4x + 3) = 3 - (8x^2 + 2x - 3) = 3 - 8x^2 - 2x + 3 = -8x^2 - 2x + 6$

On retiendra qu'on ne regroupe des x ***qu'avec des*** x***, des*** x^2 ***qu'avec des*** x^2 ***etc.***

Factoriser **une somme de termes signifie la transformer**
en un PRODUIT DE FACTEURS

On factorise, lorsque c'est possible, par ***reconnaissance d'un facteur commun*** **et à l'aide des identités suivantes :**

Pour tous réels k, a et b, on a :

♥♥ $k\times a + k\times b =$ ...$k(a+b)$........♥♥ et ♥♥ $k\times a - k\times b =$ ...$k(a-b)$..... ♥♥

Ce qui s'écrit encore : $ka + kb = k(a+b)$
$ka - kb = k(a-b)$

Exemples

Factoriser les expressions suivantes :

$3x + 3y = 3(x+y)$

$5x - 10y = 5(x-2y)$

$3x^2 - x = x(3x-1)$

$2x^2 + 4x(x-2) = 2x(x+2(x-2)) = 2x(x+2+x+2)$

$(2x+3)^2 + 6x + 9 = (2x+3)^2 + 3(2x+3) = (2x+3)(2x+3+3) = (2x+3)(2x+6)$

$(3x+1)(x-1) - 2(2x-1)(3x+1) = (3x+1)(x-1-2(2x-1)) = (3x+1)(x-1-4x+2) =$
$(3x+1)(-3x+1)$

II – Les identités remarquables

Nous allons voir de nouveaux outils, qui vont nous permettre, dans certains cas, de développer et factoriser *rapidement* certaines expressions algébriques.

Tout d'abord, ***une identité*** est ***une égalité vraie quelles que soient les valeurs des variables***.

Par exemple, l'égalité : $2(x+5) = 2x + 10$ est vraie pour tout réel x : $2(x+5) = 2x + 10$ est donc une identité.

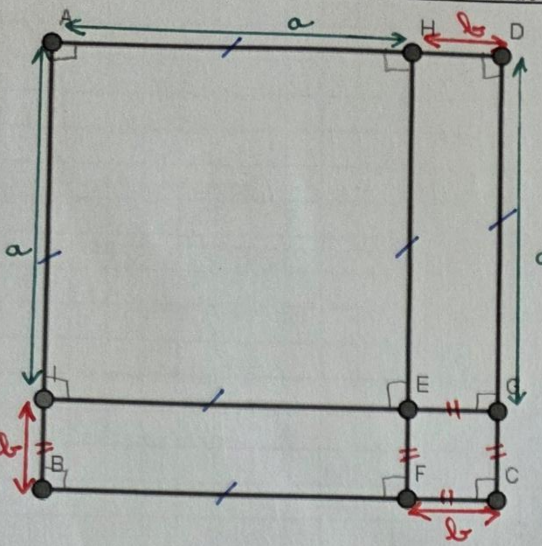
Identité remarquable numéro 1

Pour tous réels a et b : ♥♥ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ♥♥

Remarque : le terme $2ab$ de la forme développée de cette identité remarquable est appelé ...le........
...double produit.....

Preuve : $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Illustration géométrique du carré d'une somme de deux termes strictement positifs :



AHEI : carré de côté a.
EFCG : carré de côté b.
HDGE et IEFB sont des rectangles de longueur a et de largeur b.

Enfin ABCD est un carré de côté (a + b)

Aire (ABCD) = Aire (AHEI) + Aire (HDGE) + Aire (IEFB) + Aire (EGCF)

$(a+b)^2 = a^2 + a \times b + b \times a + b^2$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Remarque 💣

La précédente illustration géométrique doit vous éviter la fréquente erreur d'oubli du double produit lorsqu'on développe à l'aide de l'identité remarquable numéro 1.

Enfonçons le clou :

Calculer : $2^2 + 3^2 =$ ..13.......... puis $(2 + 3)^2 =$ .25.................. Conclusion ? $(2+3)^2 \neq 2^2 + 3^2$ car $25 \neq 13$

Exercice 2

Développer et réduire chacune des expressions suivantes :

$(x+4)^2 = x^2 + 4x + 4x + 16 = x^2 + 8x + 16$

$(2x+5)^2 = 4x^2 + 10x + 10x + 25 = 4x^2 + 20x + 25$

$(2x+3y)^2 = 4x^2 + \frac{2}{1}x \times 3y \times 2 + 6y^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

$\left(\frac{2x}{3} + \frac{4}{7}\right)^2 = \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + 2 \times \frac{2x}{3} \times \frac{4}{7} + \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{4x^2}{9} + \frac{16x}{21} + \frac{16}{49}$

$(a+b+c)^2 = ((a+b)+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + (2a+2b)c + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Exercice 3

Calculer sans poser de multiplication et sans utiliser de calculatrice : 21^2

$21 = 20 + 1$

$21^2 = (20+1)^2 = 20^2 + 2 \times 20 \times 1 + 1^2 = 400 + 40 + 1 = 441$

Exercice 4

Factoriser chacune des expressions suivantes :

$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = (x+5)^2$

$4x^2 + 4x + 1 = 2x^2 + 2 \times 2 \times x \times 1 + 1^2 = (2x+1)^2$

$\frac{x^2}{9} + \frac{2x}{3} + 1 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \frac{2}{1} \times \frac{x}{3} \times 1 + 1^2 = \left(\frac{x}{3} + 1\right)^2$

Identité remarquable numéro 2

Pour tous réel a et b, on a : ♥♥ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ♥♥

Preuve : $(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 + 2 \times a \times (-b) + (b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Exercice 5

Développer et réduire chacune des expressions suivantes :

$(x-7)^2 = x^2 + 2 \times x \times (-7) + 7^2 = x^2 - 14x + 49$

$(4t - 3u)^2 = 16t^2 - 4t \times 3u \times 2 + 9u^2 = 16t^2 - 24tu + 9u^2$

$(2x - 5y)^2 = 4x^2 - 2 \times 2x \times 5y + 25y^2 = 4x^2 - 20xy + 25y^2$

$\left(\frac{3}{2}x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{4}x^2 - \frac{2}{1} \times \frac{3x}{2} \times \frac{5}{4} + \frac{25}{16} = \frac{9}{4}x^2 - \frac{15x}{4} + \frac{25}{16}$

Exercice 6

Calculer, sans poser de multiplication et sans utiliser de calculatrice : 19^2

$19 = 20 - 1$

Donc $19^2 = (20-1)^2 = 20^2 - 2\times 20 \times 1 + 1^2 = 400 - 40 + 1 = 361$

Exercice 7

Factoriser les expressions suivantes :

$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2\times 3 \times x + 3^2 = (x-3)^2$

$\underbrace{(3x+1)(x-4)}_{F} + x^2 - 8x + 16 = (3x+1)(x-4) + x^2 - 2\times 4 \times x + 8^2 = (3x+1)(x-4) + (x-4)^2$

$E = (x-4)\big((3x+1)+(x-4)\big) = (x-4)(4x-3)$

Identité remarquable numéro 3

Pour tous réel a et b : ♥♥ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ♥♥

Preuve : Développons : $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2$

Exercice 8

Développer rapidement :

$(3x+4)(3x-4) = 9x^2 - 16$

$(x-5)(x+5) = x^2 - 25$

Exercice 9

Factoriser chacune des expressions suivantes :

$x^2 - 36 = x^2 - 6^2 = (x+6)(x-6)$

$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x+3)(2x-3)$

$25x^2 - 49y^2 = (5x)^2 - (7y)^2 = (5x+7y)(5x-7y)$

$(2x+5)^2 - (4x-2)^2 = \big((2x+5)+(4x-2)\big)\big((2x+5)-(4x-2)\big)$

$E = (6x+3)(2x+5-4x+2)$

$E = (6x+3)(-2x+7)$

$(3x - 1)(2x + 3) - (9x^2 - 1) = (3x-1)(2x+3)[(3x)^2 - 1^2)$

$F = (3x-1)(2x+3) - (3x+1)(3x-1)$

$F = (3x-1)(2x+3-3x-1)$

$F = (3x-1)(-x+2)$

$\frac{x^2}{4} - \frac{9y^2}{100} = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{3y}{10}\right)^2 = \left(\frac{x}{2} + \frac{3y}{10}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{3y}{10}\right)$

Calculer mentalement : $51^2 - 49^2$ puis $33^2 - 29^2$ et enfin 47×53.

$51^2 - 49^2 = (51+49)(51-49) = 200$

$33^2 - 29^2 = (33+29)(33-29) = 62 \times 4 = 248$

$47 \times 53 = (50-3)(50+3) = 50^2 - 3^2 = 2\,500 - 9 = 2\,491$

III-Les puissances

A-Quelques rappels sur les puissances de 10

Définitions

Soit ***n* un entier naturel non nul.** $10^n = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times \dots \times 10}_{n \text{ facteurs égaux à } 10}$

La notation 10^n désigne l'entier naturel $\underbrace{100......0}_{n \text{ zéros}}$: ♥♥ $10^n = \underbrace{100......0}_{n \text{ zéros}}$. ♥♥

♥♥ $10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{\underbrace{100....0}_{n \text{ zéros}}}$ et $10^0 = 1$. ♥♥

Voici deux tableaux utiles en Physique, SVT par exemple !

Astronomiquement grand

Notation	Signification	Écriture	Préfixe	Symbole
10^1	dix	10	déca	Da
10^2	cent	100	hecto	h
10^3	mille	1 000	kilo	k
10^6	million	1 000 000	méga	M
10^9	milliard	1 000 000 000	giga	G
10^{12}	mille milliards	1 000 000 000 000	téra	T

10^{100} $\quad 1\underbrace{0 \dots\dots\dots 0}_{100 \text{ zéros}}$ $\quad$ 1 gogol

échelle du microscopique (Proche de 0)

Notation	Signification	Écriture	Préfixe	Symbole
10^{-1}	dixième	0,1	déci	d
10^{-2}	centième	0,01	centi	c
10^{-3}	millième	0,001	milli	m
10^{-6}	millionième	0,000 001	micro	μ
10^{-9}	milliardième	0,000 000 001	nano	n
10^{-12}	millième de milliardième	0,000 000 000 001	pico	p

Enfin, terminons les rappels par la notion d'écriture scientifique, notation utilisée par la calculatrice :

Tout nombre décimal positif (= nombre ayant éventuellement un nombre fini de chiffres après la virgule) positif et non nul x s'écrit sous la forme : $x = a \times 10^n$ où : *n est un entier relatif, et* ***a est un nombre décimal compris entre 1 inclus et 10 exclu.***

La précédente écriture : $x = a \times 10^n$ est appelée écriture scientifique du nombre décimal x.

Le décimal a ne comporte donc qu'un seul chiffre non nul avant son éventuelle virgule !

C'est la notation standard utilisée par les calculatrices (notée .....) et les ordinateurs.

Exemples

1) Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

A = 2320000 ; B = 0,00057

$A = 2,32 \times 10^6$ $B = 5,7 \times 10^{-4}$

2) Donner l'écriture décimale correspondante à l'écriture scientifique suivante :

$C = 7,68 \times 10^{-5}$. 0,000 0768

Nous allons voir que les puissances de 10 ne sont qu'un cas particulier de puissances.

B- Puissances entières d'un nombre réel non nul

Définition

Soient a un nombre réel, et n un entier naturel non nul.

Le produit de n facteurs tous égaux à au réel a est noté : a^n et se lit : " a exposant n " ou encore a puissance n.

On a donc : ♥♥ $a^n = \underbrace{a \times a .... \times a}_{n \text{ facteurs égaux au réel } a}$ ♥♥

En particulier, $a^1 = .a.$, et si $a \neq 0$, on convient que $a^0 = ..1$.

Exemples

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

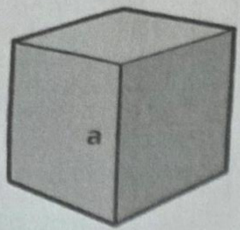
$(-3)^2 = -3 \times (-3) = 9$

$3,5^2 = 3,5 \times 3,5 = 12,25$

$x^3 = x \times x \times x$

$3^0 = 1$

En géométrie, le volume V d'un cube dont la longueur des arêtes est a est donné par :



$V = a^3$

Enfin, si $a \neq 0$ *et* n est un entier naturel non nul, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \ldots \times a}_{n \text{ facteurs tous égaux au réel } a}}$

En particulier, $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ est fréquemment utilisée en Physique !

Exemples

$2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$; $7^{-1} = \dfrac{1}{7^1} = \dfrac{1}{7}$; $(-5)^{-4} = \dfrac{1}{(-5)^4} = \dfrac{1}{625}$

Les puissances ont des propriétés qui vont permettre de simplifier les écritures et d'accroître la puissance de l'arsenal calculatoire que vous possédez.

Au collège, vous avez vu des règles de calcul sur les puissances de 10.

Nous allons généraliser ces dernières à tout nombre a non nul.

Activité

Ecrire sous la forme ***d'une seule puissance***, chacune des expressions suivantes :

$2{,}4^3 \times 2{,}4^2 = 2{,}4^5$

$\dfrac{3^5}{3^7} = \dfrac{\cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 1}{\cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 3 \times 3} = \dfrac{1}{3^2} = 3^{-2} = 3^{5-7}$

$(4^2)^3 = 4^6$

$2^3 \times 5^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 = 10^3 = (2 \times 5)^3$

$\dfrac{3^4}{5^4} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^4$

On généralise sans difficulté les exemples précédents :

Propriétés ♥♥♥♥

Quels que soient les réels a et b non nuls, et quels que soient les entiers relatifs n et p, on a :

$a^n \times a^p = a^{n+p}$ — *Exemple* : $4^3 + 4^7 = 4^{10}$

$\dfrac{a^n}{a^p} \; a^{n-p}$ — *Exemple* : $\dfrac{8,2^5}{8,2^3} = 8,2^2$

$(a^n)^p \; a^{np}$ — *Exemple* : $((2,3)^5)^4 = 2,3^{20}$

$a^n \times b^n = (a.b)^n$ — *Exemple* : $7^4 \times 8^4 = 56^4$

$\dfrac{a^n}{b^n} \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ — *Exemple* : $\dfrac{3^9}{7^9} = \left(\dfrac{3}{7}\right)^9$

Ces propriétés, d'usage courant en mathématiques, sont à connaître dans les deux sens !

Exercice 10

1) Ecrire sous la forme **d'une seule puissance**, chacune des expressions suivantes :

$A = 2,5^3 \times 2,5^{-4} \times (2,5^2)^{-3} = 2,5^{-1} \times 2,5^{-6} = 2,5^{-7}$

Dans toute la suite, x désigne un réel non nul et n est entier.

$B = \dfrac{x^4 \times x^{-1}}{(x^3)^2} = \dfrac{x^3}{x^6} = x^{-3}$ $\qquad C = \dfrac{x}{x^n} = x^{1-n}$

$D = \dfrac{x^{n+2}}{(x^n)^2} \times \dfrac{1}{x^3 \times x^{-n}} = \dfrac{x^{n+2}}{x^{2n}} \times \dfrac{1}{x^{3-n}} = x^{n+2-2n} \times x^{-3+n} = x^{-n+2} \times x^{-3+n} = x^{-n+2+(-3+n)} = x^{-1}$

$E = \dfrac{13,1^{-3}}{1,31^{-3}} = \left(\dfrac{13,1}{1,31}\right)^{-3} = 10^{-3}$

$F = \dfrac{3^{-10} \times 9^2}{3^5} = \dfrac{3^{-10} \times (3^2)^2}{3^5} = \dfrac{3^{-10} \times 3^4}{3^5} = \dfrac{3^{-6}}{3^5} = 3^{-11}$ $\qquad G = \dfrac{(5^{-5})^3}{\left((5^2)^3\right)^4} = \dfrac{5^{-15}}{5^{24}} = 5^{-39}$

2) Donner l'écriture scientifique de : $H = 2375 \times 10^{-14}$ $2,375 \times 10^3 \times 10^{-14} = 2,375 \times 10^{-11}$

3) Ecrire sous la forme : $a^n \times b^p$, où n et p sont des entiers relatifs :

$I = (a^3 \times b)^4$ $= a^{12} \times b^4$

$J = a^2 \times \left(\frac{a}{b}\right)^3 \times b^{-5}$ $= a^2 \times a^3 \times (-b)^3 \times b^{-5} = a^5 \times b^{-8}$

$K = a^4 b^{-6} (ab)^3$ $a^4 \times b^{-6} \times a^3 \times b^3 = a^7 \times b^{-3}$

4) Simplifier l'expression suivante : $L = \left(\frac{3}{4}\right)^{25} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{24}$. $L = 3^{25} \times 4^{-25} \times 4^{24} \times 3^{-24} = 3^1 \times 4^{-1} = \frac{3}{4}$

5) *Matt* a écrit dans son *DM* : $3 \times 10^2 = 30^2 = 900$. Qu'en pensez-vous ?

C'est faux : $3 \times 10^2 = 3 \times 100 = 300$ et Matt confond avec : $(3 \times 10)^2 = 30^2 = 900$

6) Calculer sous forme simplifiée au mieux : $\frac{2^7 \times 10^{-5} \times 3^{10}}{10^{-9} \times 2^5 \times 3^7} =$ $\frac{10^{-5}}{10^{-9}} \times \frac{2^7}{2^5} \times \frac{3^{10}}{3^7} = 10^4 \times 2^2 \times 3^3$

$= 100\,000 \times 4 \times 27 = 1\,080\,000$

Remarque

Il n'existe aucune règle pour additionner ou soustraire des puissances d'un même nombre !

Exemples

Calculer : $10^2 + 10^3$ et comparer le résultat à 10^5. Conclusion ? $1\,100 \neq 100\,000$ donc $10^2 + 10^3 \neq 10^5$

De même calculer la valeur de $10^3 - 10^2$ et celle de 10^{3-2}. Conclusion ?

$1\,000 - 100 = 900$ $10^1 = 10$

$900 \neq 10$ donc $10^3 - 10^2 \neq 10^{3-2}$

Exercice11

Soient $A = 5 \times 10^3$ et $B = 5 \times 10^{-3}$.

Calculer, <u>*sans utiliser de calculatrice*</u>, les expressions : $A+B$; $A-B$; $A \times B$ et $\frac{A}{B}$.

$A + B = 5\,000 + 0{,}005$

$A + B = 5\,000{,}005$

$A - B = 5\,000 - 0{,}005$

$A - B = 4\,999{,}995$

$A \times B = 5 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-3}$

$A \times B = 25 \times 10^0$

$A \times B = 25 \times 1$

$A \times B = 25$

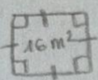
$\frac{A}{B} = \frac{\cancel{5} \times 10^3}{\cancel{5} \times 10^{-3}} = 10^6$

IV.- Les racines carrées

Au collège, vous avez déjà rencontré cette notion que nous allons définir rigoureusement.

Exemple

Un carré a pour aire 16 m^2. Déterminer la longueur des côtés de ce carré.



Soit C la longueur des côtés de ce carré : $C^2 = 16$ donc $C = \sqrt{16} = 4$

$C = 4\,m$

Définition

Soit a un réel *positif ou nul*. Cette phrase se note mathématiquement : $a \geq 0$.

♥♥**On appelle racine carrée de a, l'unique nombre réel positif ou nul dont le carré est égal à a.**♥♥

On note $\sqrt{a}$ la racine carrée de a.

D'après la définition, on a donc : $(\sqrt{a})^2 = a$

Pour tout nombre a positif ou nul : $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a} \geq 0$

Exemples

$\sqrt{100} = 10$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$

Bien souvent, on ne sait pas donner de tête les valeurs des racines carrées.

On se contentera, de donner une valeur approchée, si besoin en est, grâce à une calculatrice : par exemple, $\sqrt{3} \approx 1,73$ au centième près

$\sqrt{3} \approx 1,732\,051$ au millionième près

Remarques

Le symbole $\sqrt{}$ est appelé le radical.

💣 Jamais de nombre négatif sous le radical : écrire $\sqrt{-2}$ est une faute, vu que la précédente écriture n'a aucun sens car -2 est un nombre négatif !

D'un point de vue géométrique, si a est un nombre positif, $\sqrt{a}$ représente la longueur des côtés d'un carré d'aire égale à a.

⚠ Il est faux d'écrire que $\sqrt{3} = 1,5$ ou encore que $\sqrt{8} = 4$ ...

La racine carrée d'un nombre a positif n'a rien à voir avec la division par 2 !! 💣💣 $\sqrt{a} \neq \frac{a}{2}$. 💣💣

Nous allons voir que la racine carrée a des propriétés "compatibles" avec le produit et le quotient seulement.

Propriétés bien utiles des racines carrées

Pour tous nombres réels *a et b positifs ou nuls*, on a :

1) ♥♥ $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ ... ♥♥

2) Si de plus, $b \neq 0$, on a : ♥♥ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ...♥♥

Preuve **: Ces relations s'obtiennent sans peine en calculant le carré de chacun des membres de gauche et de droite, et en ayant conscience que deux nombres POSITIFS sont égaux revient à dire qu'ils ont le même carré.**

Exemples

Calculer la valeur exacte de : $A = \sqrt{50} \times \sqrt{2}$ **puis** $B = \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$

$A = \sqrt{50 \times 2} = \sqrt{100} = 10$ $\quad B = \sqrt{\frac{54}{6}} = \sqrt{9} = 3$

Exercice 12

Ecrire chacun des nombres suivants, sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers naturels, b étant le plus petit possible :

On écrit le radicande (nombre sous la racine) comme un produit de 2 facteurs dont l'un est $\underbrace{\text{un carré parfait}}_{\text{le carré d'un entier}}$

$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} \times 5\sqrt{3}$

$3\sqrt{80} - 8\sqrt{125} = 3\sqrt{16 \times 5} - 8\sqrt{25 \times 5} = 3 \times 4 \times \sqrt{5} - 8 \times 5\sqrt{5} = 12\sqrt{5} - 40\sqrt{5} = (12-40)\sqrt{5} = -28\sqrt{5}$

$\sqrt{80} = \sqrt{4 \times 20} = \sqrt{4} \times \sqrt{20} = 2 \times \sqrt{4 \times 5} = 2 \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2 \times 2 \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

$\sqrt{125} = \sqrt{5 \times 25} = \sqrt{25} \times \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

Exercice 13

1) Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des fractions irréductibles : $A = \sqrt{\frac{5}{36}} + 2\sqrt{\frac{20}{9}}$

$A = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{36}} + 2\,\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}}{6} + 2\,\frac{\sqrt{4 \times 5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{6} + \frac{2 \times \sqrt{4} \times \sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{6} + \frac{4\sqrt{5}}{3} = \frac{8\sqrt{5}}{6} + \frac{\sqrt{5}}{6} = \frac{9\sqrt{5}}{6} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

2) Ecrire sous la forme $a + b\sqrt{c}$, où a et b sont des entiers, et c l'entier naturel le plus petit possible :

$A = (2+\sqrt{3})^2 = 2^2 + \sqrt{3}^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{3} = 4 + 3 + 4\sqrt{3} = 7 + 4\sqrt{3}$

$B = (3\sqrt{5} - 4)(3\sqrt{5} + 4) = (3\sqrt{5})^2 - 4^2 = 9 \times 5 - 16 = 45 - 16 = 29$

3) Calculer $x^2 + y^2$, avec $x = \sqrt{2}(1 + \sqrt{6})$ et $y = 2 - \sqrt{6}$

$x^2 = (\sqrt{2}(1+\sqrt{6}))^2 = \sqrt{2}^2 \times (1+\sqrt{6})^2 = 2(1^2 + 2 \times \sqrt{6} + \sqrt{6}^2) = 2(1 \times 2\sqrt{6} + 6) = 2(7 \times 2\sqrt{6}) = 14 \times 4\sqrt{6}$

4) Simplifier $\frac{2}{\sqrt{2}}$ puis, pour x réel strictement positif, simplifier l'expression $\frac{x}{\sqrt{x}}$

$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}^2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \times \cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$

$x > 0$ donc $x = \sqrt{x}^2$

$\frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} \times \cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}} = \sqrt{x}$

3) $y^2 = (2 - \sqrt{6})^2 = 2^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{6} + \sqrt{6}^2 = 4 - 4\sqrt{6} + 6 = 10 \times 4\sqrt{6}$

$x^2 + y^2 = 14 \times \cancel{4\sqrt{6}} + 10 \times \cancel{4\sqrt{6}} = 24$

Remarque

On pourrait être tenté de penser que la racine carrée d'une somme est la somme des racines carrées….

Malheureusement, il n'en est rien :

Calculer la valeur exacte de chacun des deux nombres : $\sqrt{36}$ **puis** $\sqrt{64}$ **puis** $\sqrt{36+64}$

$\sqrt{36} = 6$ $\sqrt{64} = 8$ $\sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$ $\sqrt{36} + \sqrt{64} = 6+8 = 14$ $10 \neq 14$ donc $\sqrt{36} + \sqrt{64} \neq \sqrt{36+64}$

$\cancel{\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}}$ **est en général** ***faux*****, tout comme** $\cancel{\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}}$ **!**

Exercice 14

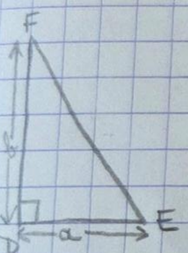
Soit a et b deux réels positifs.

Soit DEF un triangle rectangle en D tel que $DE = a$ et $DF = b$.

Exprimer en fonction des nombres a et b la longueur EF.

Application numérique **: Si $DE = 12$ cm et $DF = 6$ cm, déterminer la valeur exacte de EF en l'écrivant sous la forme : $x\sqrt{y}$ où x et y sont des entiers naturels, y étant le plus petit possible.**

ex 14 :



Le triangle DEF est rectangle en D

L'hypoténuse est [EF]

L'égalité de Pythagore est

$EF^2 = ED^2 + DF^2$

$EF^2 = a^2 + b^2$

$EF = \sqrt{a^2+b^2}$

Application numérique

Le triangle DEF est rectangle en D

L'hypoténuse est [EF]

$EF^2 = ED^2 + DF^2$

$EF^2 = 12^2 + 6^2$

$EF^2 = 144 + 36$

$EF^2 = 180$

$EF = \sqrt{180}$

$EF = \sqrt{9 \times 20}$

$EF = \sqrt{9} \times \sqrt{20}$

$EF = 3 \times \sqrt{5 \times 4}$

$EF = 3 \times \sqrt{5} \times \sqrt{4}$

$EF = 3 \times \sqrt{5} \times 2$

$EF = 6\sqrt{5}$

Un point d'esthétique :

En mathématiques, on a pour *habitude* de ne pas faire figurer de racines carrées au dénominateur des écritures fractionnaires.

Par exemple, on n'écrira pas $\frac{5}{\sqrt{3}}$. $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

En utilisant les règles sur les racines carrées et sur les fractions, écrire le nombre $\frac{5}{\sqrt{3}}$ avec un dénominateur entier.

Technique (à retenir) : On multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction par la valeur de son dénominateur.

Exemple

Ecrire sans racine carrée au dénominateur : $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a}^2 = a$