Chapitre : VII

« En mathématiques, nous sommes davantage des serviteurs que des maîtres. » Charles Hermite

Chapitre VII

Dénombrement et combinatoire

I – Généralités et vocabulaire

Définition

Intuitivement, un ensemble désigne une famille "d'objets" distincts appelés les éléments de l'ensemble.

Un ensemble peut être formé de nombres, de lettres, de fruits, d'êtres humains.......

Soit n est un entier naturel, et E un ensemble composé de n éléments.

On dit que E est un ensemble fini, et le nombre d'éléments de E est appelé le cardinal de E, et noté $card(E)$ ou encore parfois, $\#(E)$ ou même $|E|$. Ici, $card(E) = n$.

Lorsqu'on énumère les éléments d'un ensemble, on commence par mettre une accolade, puis les différents éléments de l'ensemble, séparés à chaque fois par un point-virgule, et enfin on referme l'accolade.

Dénombrer signifie *compter le nombre d'éléments* d'un ensemble.

Exemples

$E = \{a ; b ; m ; p\}$ est un ensemble fini de cardinal égal à .4. : $card(E)$ = 4..

L'élément m appartient à l'ensemble E, ce qui se note : $m \in E$

Par-contre, l'élément z n'appartient pas à l'ensemble E, ce qui se note : $z \notin E$

$F = \{-1 ; 2,5 ; 6 ; \pi ; \frac{1}{9}\}$ est un ensemble fini de cardinal égal à .5.. : $card(F)$ = 5..

Remarques : Il existe des ensembles qui ne sont pas finis, comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ par exemple.

L'ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'ensemble vide et se note : $\varnothing$.

L'ordre des éléments dans un ensemble n'intervient pas : $\{a ; b ; c\} = \{b ; a ; c\}$

$\{1 ; 2\} = \{2 ; 1\}$.

Deux *ensembles sont égaux* lorsqu'ils contiennent *exactement les mêmes éléments*.

Il n'y a *pas de répétitions d'éléments* au sein d'un ensemble : par exemple, on n'écrira pas : ~~{a ; a}~~ mais $\{a\}$!

Définition

Deux ensembles sont ***disjoints*** lorsqu'ils n'ont ***aucun élément en commun***, c'est-à-dire que ***leur intersection est vide***.

Pour dire que des ensembles A et B sont disjoints on notera : $A \cap B = \varnothing$: on lira : A *inter* B est vide. ($\cap$ est le symbole désignant l'intersection).

Par exemple, $A = \{1 ; 2 ; 3\}$; $B = \{6 ; 17\}$: A et B sont disjoints.

Définitions

Soit E un ensemble.

On appelle partie de E (ou encore sous-ensemble de E), tout ensemble F dont chacun des éléments appartiennent aussi à E.

On dit que F est inclus (ou contenu) dans E et on note cela : $F \underset{\text{est inclus dans}}{\subset} E$.

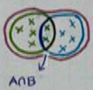
Exemple

$E = \{a ; e ; i ; o ; u ; y\}$ et $F = \{e ; u\}$: on a $F \subset E$. De même, $\{0 ; 1\} \subset \{0 ; 1 ; 5\}$.

Rappelons enfin que :

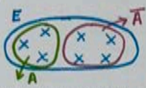
- L'intersection de deux ensembles A et B, notée $A \cap B$, (lire A inter B) est l'ensemble des éléments appartenant simultanément à A et à B.
- La réunion de deux ensembles A et B, notée $A \cup B$ (lire A union B) est l'ensemble dont les éléments appartiennent à au moins un des deux ensembles A ou B.
- Si E est un ensemble et A un sous-ensemble de E, le complémentaire de A dans E, noté $\bar{A}$, est l'ensemble formé par tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

$\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$.



○ : A∪B = réunion / union

Illustration :



Exemple

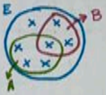
i) Si $A = \{e ; f ; g ; h\}$ et $B = \{f ; t ; u\}$, alors : $A \cap B = \{f\}$ et $A \cup B = \{e ; f ; g ; h ; t ; u\}$

ii) Si $E = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 8 ; 11\}$ et $A = \{2 ; 3 ; 11\}$, déterminer $\bar{A}$. $\Rightarrow \bar{A} = \{0 ; 1 ; 8\}$

Remarque

Attention, lorsqu'on a deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E, il est fréquent que A ne soit pas inclus dans B et que B ne soit pas inclus dans A.

Illustration :



Ici : $\underbrace{A \not\subset B \text{ et } B \not\subset A}_{\text{n'est pas inclus dans.}}$

Définitions

Soit E un ensemble.

Une partie de E constituée *d'un seul élément* est appelée un **singleton**.

Par exemple, si E = {chien ; chat ; poisson}, F = {chien} est un singleton.

Si $E = \{-8 ; 5 ; 3\}$, $F = \{5\}$ est un singleton.

Quel est le nombre de singletons d'un ensemble E ayant pour cardinal n ?

- Il y a n singletons dans E : Si $E = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$; alors les singletons de E sont : $\{\{x_1\}, \{x_i\}$

Si E contient au moins deux éléments, on appelle **paire** toute partie de E *constituée d'exactement deux éléments.*

Par exemple, {2 ; 3} ; {chien ; chat} ; {trèfle ; cœur} sont des exemples de paires.

L'ensemble dont les éléments sont les différentes parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$ et appelé ensemble des parties de E. sous ensembles.

Exemples

Déterminer l'ensemble des parties de l'ensemble $E = \{1 ; 2\}$ et préciser le cardinal de $\mathcal{P}(E)$.

$$\mathcal{P}(E) = \{ \underbrace{\emptyset}_{\text{cardinal } 0} ; \underbrace{\{1\} ; \{2\}}_{\text{cardinal } 1} ; \underbrace{\{1 ; 2\}}_{\text{cardinal } 2} \} \qquad \text{card } \mathcal{P}(E) = 4$$

Définition

Soit E un ensemble non vide, et k un entier naturel supérieur ou égal à 1.

♥ On appelle *k-liste* de E (*k-liste* est une abréviation de liste de longueur k), ou encore *k-uplet* de E, une **liste ordonnée** formée de k éléments (non nécessairement distincts) de E.

↳ l'ordre des éléments à une importance.

Les éléments d'une telle liste ordonnée sont appelés coordonnées, ou encore composantes.

On note avec des ***parenthèses*** un *k-uplet*, chacun de ses éléments étant séparés du suivant par une virgule ou un point-virgule.

Exemples

Si $E = \{0 ; 1\}$, alors :

$(0 ; 1 ; 0 ; 0)$ est une 4-liste (ou 4-uplet) de E, $(0 ; 0 ; 0 ; 1)$ est un autre 4-uplet (*attention l'ordre des éléments est fondamental dans une k-liste*).

$(0 ; 1)$ est une 2-liste de E et $(1 ; 0)$ est une autre 2-liste de E.

$(0 ; 0 ; 0)$ est une 3-liste de E, $(1 ; 0 ; 0)$ est un autre 3-uplet de E.

Citer un octet de E, c'est-à-dire une 8-liste d'éléments de E : $(0 ; 0 ; 1 ; 0 ; 1 ; 1 ; 0 ; 1)$

Concrètement, un code de carte bleue est une 4-liste de $\underbrace{\text{l'ensemble des chiffres.}}_{E = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}}$

Remarque : dans un ***k-uplet***, il peut donc y avoir ***répétition*** d'un ou plusieurs éléments, et l'***ordre*** des éléments est ***fondamental***.

card (E)	card $\mathcal{P}(E)$
0	1
1	2
2	4
3	8

Rq. : Si $|E| = n$, alors $\mathcal{P}(E) = 2^n$

Définition

Une *2-liste* est appelé un *couple*.

Attention, l'ordre des éléments dans un couple est fondamental : $(a ; b) \neq (b ; a)$: penser aux coordonnées d'un point dans le plan !

Les composantes d'un couple peuvent être identiques ! C'est le cas du couple $(0 ; 0)$!

Une *3-liste* est appelé un *triplet* : par exemple, en géométrie dans l'espace, on a vu qu'un point peut être repéré à l'aide d'un triplet de nombres réels.

$(6 ; 2{,}5 ; 3)$ est un exemple de triplet de réels.

Définition (*Rappel*)

Soit E et F deux ensembles non vides (non nécessairement finis).

Le produit cartésien des ensemble E et F, que l'on note $E \times F$ (lire E croix F) est l'ensemble formé par tous les couples $(x ; y)$ tels que $x \in E$ et $y \in F$.

$E \times F = \{(x ; y) / x \in E, y \in F\}$. (Le slash / signifie tel que lorsqu'il est écrit dans un ensemble).

Le symbole × (croix) ne doit pas être confondu avec celui de la multiplication !!

Exemples

Conjecture : $|E| = 3$

$|F| = 2$ $\quad |E\times F| = 6$

1) $E = \{a ; b ; c\}$ et $F = \{b ; e\}$.

↳ $|E\times F| = |E| \cdot |F|$ $\quad$ ($\cdot$ = multiplié)

Déterminer le produit cartésien : $E\times F = \{(a,b), (a,e) ; (b,b) ; (b,e), (c,b) ; (c,e)\}$

2) Ici, $E = \{3 ; 2 ; 1\}$ et $F = \{0 ; 1\}$. Déterminer les produits cartésiens $E\times F$, puis $F\times E$.

A-t-on $E\times F = F\times E$?

↳ Non car : $(3;1) \in E\times F$ et $(3;1) \notin F\times E$

$E\times F = \{(3;0) ; (3;1), (2;0) ; (2;1), (1;0) ; (1;1)\}$

$F\times E = \{(0;3) ; (0;2) ; (0;1), (1;3), (1;2) ; (1;1)\}$

On retiendra donc que le produit cartésien d'ensembles n'est pas commutatif

Si $E = F$, on a : $E\times F = E\times E$ qui est noté E^2.

Par exemple, $\mathbb{R}^2$ désigne l'ensemble formé par tous les couples de réels (géométriquement $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des points du plan !). $\mathbb{R}^2 = \{(x ; y) / x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\}$.

Remarques : on peut étendre la définition du produit cartésien à plus de deux ensembles :

Si E, F, G désignent trois ensembles, le produit cartésien $E\times F\times G$ (lire E croix F croix G) est l'ensemble des triplets de la forme $(x ; y ; z)$ où $x\in E$, $y\in F$ et $z\in G$.

Si $E = F = G$, alors $E\times F\times G = E\times E\times E = E^3$.

Par exemple, $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble formé par tous les triplets de réels (géométriquement, $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des points de l'espace).

Plus généralement : (définition du produit cartésien de k ensembles) :

Si k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2, et $E_1, E_2, \ldots, E_k$ sont des ensembles non vides, on appelle produit cartésien des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_k$, l'ensemble noté $E_1\times E_2\times \ldots\times E_k$, dont les éléments sont les *k-uplets* de la forme $(a_1 ; a_2 ; \ldots ; a_k)$ où $a_1\in E_1, a_2\in E_2, \ldots, a_k\in E_k$.

$E_1\times E_2\times\ldots\times E_k = \{(a_1 ; a_2 ; \ldots ; a_k) / a_1\in E_1, a_2\in E_2, \ldots, a_k\in E_k\}$.

II- Principes simples de dénombrement

A-Le principe additif

n et p sont deux entiers naturels.

Soit E et F deux ensembles finis et ***disjoints*** tels que : $card(E) = n$ et $card(F) = p$.

Le nombre d'éléments de l'ensemble $E\cup F$ est égal à $n+p$

On a donc, ***lorsque E et F sont disjoints*** : $card(E\cup F) = card(E) + card(F)$

⚠ ↳ aucun élément commun

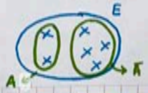
En pratique, si vous avez deux sacs de billes, une façon de compter le nombre total de billes que vous possédez est de compter le nombre de billes de chaque sac, puis d'additionner ces deux cardinaux.

Exemple

Si $E = \{a ; b ; c\}$ et $F = \{y ; z\}$, alors, comme E et F sont disjoints, on a : $card(E\cup F) = card(E) + card(F) = 3+2 = 5$

En particulier, si A est un sous-ensemble d'un ensemble fini E, on a : $card(\bar{A}) = card(E) - card(A)$

Illustration et justification :



$\underbrace{A\cup\bar{A} = E \quad \text{et} \quad A\cap\bar{A} = \varnothing}_{\text{union disjointe}}$

Donc $\underbrace{card(A\cup\bar{A})}_{\text{union} \perp\!\!\perp} = card(E)$ $\quad card(A) + card(\bar{A}) = card(E)$. Donc $card(\bar{A}) = card(E) - card(A)$

De même le principe additif s'étend à plus de deux ensembles :

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Si $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_p$ sont p ensembles finis et ***deux à deux disjoints***, alors :

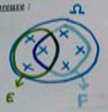
$card(E_1 \cup E_2 \cup \ldots\ldots \cup E_p) =$ card (E_1) + card (E_2) + ... + card (E_p) $= \sum_{i=1}^{p}$ card (E_i)

Rigoureusement on note : $card(\bigcup_{i=1}^{p} E_i) = \sum_{i=1}^{p}$ card (E_i)

Revenons au cas général de deux ensembles finis E *et* F, *non nécessairement disjoints* :

On a : $card(E \cup F) =$ card (E) + card (F) − card $(E \cap F)$

Illustration et preuve :



- Dans l'addition : card (E) + card (F), on compte une fois de trop les éléments communs à E et F c'est à dire le cardinal de $E \cap F$.

Ainsi : card $(E \cup F)$ = card (E) + card (F) − card $(E \cap F)$

Exemple

1) Dans un club de sport de 90 adhérents, 35 pratiquent le tennis, 24 pratiquent le football et 8 pratiquent chacun de ces deux sports.

a) Déterminer le nombre d'adhérents pratiquant au moins un des deux sports (parmi tennis et football).

b) En déduire le nombre d'adhérents du club ne pratiquant ni tennis ni football.

c) Déterminer le nombre d'adhérents du club pratiquant un seul des deux sports parmi tennis et football.

1) a) A : ensemble des adhérents du club $\Rightarrow$ card (A) = 90

T : ______ des personnes du club jouant au tennis $\Rightarrow$ card (T) = 35

F : ______ au foot $\Rightarrow$ card (F) = 24

$T \cap F$: Ensemble des adhérents faisant les 2 $\Rightarrow$ card $(T \cap F) = 8$

On cherche ici card $(T \cup F)$ = card (T) + card (F) − card $(T \cap F)$

card $(T \cup F) = 35 + 24 - 8 = 51$

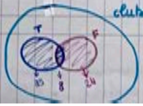
b) $\underbrace{\text{ni tennis ni foot}}$

card $(\overline{T} \cap \overline{F})$ = card (A) − card $(T \cup F)$

card $(\overline{T} \cap \overline{F}) = 90 - 51 = 39$

(⊛ $\underbrace{\text{ni A ni B}}_{\text{contraire de } A \cup B} \Rightarrow \overline{A} \cap \overline{B}$)

c)



- card (T) = 35 → card (T seulement) = 35 − 8 = 27
- card (F) = 24 → card (F seulement) = 24 − 8 = 16
- card $(T \cap F) = 8$

B - Le principe multiplicatif

Principe multiplicatif

n et p désignent deux entiers naturels non nuls.

Soient E et F deux ensembles finis et non vides tels que $card(E) = n$ et $card(F) = p$.

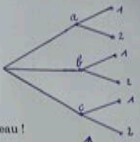
Alors le produit cartésien $E \times F$ est un ensemble fini et on a : $card(E \times F) = card(E) \times card(F) = np$.

En effet, $card(E \times F)$ peut être vu comme le nombre de cases à remplir à l'aide de couples, dans un tableau à double entrée contenant, par exemple, en ligne les éléments de E et en colonne ceux de F.

Exemple

Si $E = \{a ; b ; c\}$ et $F = \{1 ; 2\}$: $card(E \times F) = 3 \times 2 = 6$

E \ F	1	2
a	(a ; 1)	(a ; 2)
b	(b ; 1)	(b ; 2)
c	(c ; 1)	(c ; 2)



$E \times F$ est l'ensemble formé par les six couples écrits dans ce tableau !

On aurait aussi pu schématiser le produit cartésien par un arbre également :

Remarque : le principe multiplicatif se généralise au produit cartésien de plusieurs ensembles :

Si $E_1, E_2, \ldots, E_k$ sont des ensembles finis non vides :

$card(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k) = card(E_1) \times card(E_2) \times \ldots \times card(E_k)$.

Exemples

1) A la cantine un repas simple est constitué d'une entrée et d'un plat.

La cantine propose trois entrées et deux plats. Déterminer le nombre de repas simples différents que vous pouvez constituer.

2) Un repas complet est composé d'une entrée, un plat et un dessert.

Vous avez le choix entre trois entrées, deux plats, et 4 desserts. Dénombrer combien de repas complets différents on peut constituer.

1) $E = \{e_1 ; e_2 ; e_3\}$

$P = \{P_1 ; P_2\}$

$R = E \times P$ $\quad$ R = ensemble des repas simples

donc $card(R) = card(E) \times card(P)$

$= 3 \times 2$

$= 6$

2) $D = \{d_1 ; d_2 ; d_3 ; d_4\}$

R_c = ensemble des repas complets

$R_c = E \times P \times D$

Donc $card(R_c) = \underbrace{card(E)}_{3} \times \underbrace{card(P)}_{2} \times \underbrace{card(D)}_{4}$

$= 3 \times 2 \times 4$

$= 24$

Propriété

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n, et k un entier naturel non nul.

Le nombre de k-listes (ou k-uplets) de E est égal à n^k, c'est le cardinal du produit cartésien E^k.

Preuve : Par récurrence sur k ! $(e_1 ; e_2 ; \cdots ; e_k)$ avec : $\forall 1 \leq i \leq k$, $e_i \in E$

n choix

Exercice 1

a) Combien de mots de trois lettres (ayant un sens ou non) peut-on former à partir de l'alphabet usuel formé de 26 lettres ?

b) On dispose de 3 tiroirs dans une commode, et on veut y ranger 5 caleçons. Dénombrer combien de rangements on peut faire de ces 5 caleçons.

c) Un code d'immeuble est constitué de 4 chiffres suivis d'une une lettre prise parmi les lettres A, B et C. → réflexe : on passe par le complémentaire = contraire

Déterminer le nombre de codes qui contiennent au moins un zéro.

d) Un QCM est constitué de 6 questions. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, et une seule est exacte.

Dénombrer de combien de façons différentes on peut répondre à ce QCM, en cochant systématiquement une réponse par question.

e) De combien de façons différentes peut-on répondre à ce QCM si on s'autorise de ne pas répondre à une question lorsqu'on n'est pas sûr de soi ?

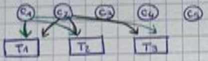
f) Combien y-a-t-il de couples (respectivement de triplets) dans un ensemble à n éléments ($n \geq 3$).

a) (□ □ □) . Autant que de 3-listes de l'ensemble formé par l'alphabet

26 choix

Donc $26 \times 26 \times 26 = 17\,576$ mots de trois lettres.

b) 3 tiroirs → 5 caleçons



. Pour chaque façon caleçon, il y a 3 choix possibles de tiroir

Donc pour ranger les 5 caleçons on a :

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$ façons de ranger

c) Nb Total des codes que l'on peut taper :

0) □ □ □ □ □

4 chiffres — 1 lettre (A, B ou C)

10 choix pour chaque (chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)

. Par principe multiplicatif, il y a en tout : $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 3 = 30\,000$ codes

c) 1) Ex

. (1 ; 5 ; 0 ; 8 ; A)

. (0 ; 0 ; 2 ; 3 ; B)

. (0 ; 0 ; 0 ; 0 ; A)

A = ensemble des codes ne contenant aucun zéro

$\overline{A}$ = __________ contenant au moins un zéro

□ □ □ □ □

9 choix 3 choix lettres

$\text{card}(A) = 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 3 = 19\,683$

Donc $\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(A)$ où Ω est l'ensemble de tous les codes (q. c)

$\boxed{\text{card}(\overline{A}) = 30\,000 - 19\,683 = 10\,317}$ codes ont au moins un zéro

d) $(q_1 ; q_2 ; q_3 ; q_4 ; q_5 ; q_6)$: Il y a : 4^6 façons de répondre au QCM (systématiquement)

4 choix

$\boxed{4^6 = 4096}$

e)

	A	B	C	D	∅
Q_1					
Q_2					
Q_3					
Q_4					
Q_5					
Q_6					

$(q_1 ; q_2 ; q_3 ; q_4 ; q_5 ; q_6)$

5 choix

(ne pas répondre est un choix)

. autant que six listes d'ensemble E, de cardinal 5,

c'est à dire : $\boxed{5^6 = 15\,625 \text{ façons}}$

f) $E = \{e_1 ; e_2 ; \cdots ; e_n\}$ $C = \{(a ; b) ; a \in E ; b \in E\}$

$\rightarrow$ Il y a n^2 couples d'éléments dans E

$T = \{(a ; b ; c) ; a \in E , b \in E , c \in E\}$

$\rightarrow$ Il y a $\underbrace{n^3}_{n \times n \times n}$ triplets d'éléments dans E

C- Arrangements et permutations

1) La notion de factorielle

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On appelle factorielle n (ou encore n factorielle), le nombre noté $n!$, qui est égal au produit de tous les nombres entiers de 1 à n.

Ainsi : ♥♥ $n! = 1 \times 2 \times \ldots\ldots \times n$ ♥♥

Par exemple : $1! = 1$ $\quad 2! = 1\times2 = 2$ $\quad 3! = 1\times2\times3 = 6$ $\quad 4! = 1\times2\times3\times4 = 24$.

Combien vaut 5! ? $5! = 1\times2\times3\times4\times5 = 120$

A l'aide de la calculatrice, trouver la valeur de 11! $\quad 11! = 39\,916\,800$

Attention, les valeurs prises par $n!$ augmentent très vite avec n, votre calculatrice n'arrive plus à afficher une valeur approchée de $n!$ dès que $n > 120$.

On convient que : $0! = 1$.

Pour tout entier naturel n, on a : ♥♥ $\boxed{(n+1)! = (n+1).n!}$ ♥♥ (Relation fondamentale)

Pourquoi la relation précédente au fait ?

$$(n+1)! = \underbrace{1\times2\times\dots\times n}\times(n+1)$$

$$(n+1)! = n!\times(n+1)$$

Exercice 2

1) Simplifier au mieux les écritures suivantes :

$A = \dfrac{10!}{7!}$ $\quad B = \dfrac{7!-5!}{4!}$ $\quad C = \dfrac{n!}{(n-2)!}$ où n est un entier supérieur à 2.

$D = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$ où n est entier naturel.

2) Ecrire à l'aide d'un produit ou quotient de factorielles uniquement, chacune des expressions suivantes :

$A = 5\times6\times7\times8\times9\times10$ $\quad B = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$, où $2 \le k \le n$.

1)

$$A = \frac{10!}{7!} = \frac{10\times9\times8\times7!}{7!} = 10\times9\times8 = 720$$

$$B = \frac{7!-5!}{4!} = \frac{7\times6\times5\times4! - 5\times4!}{4!} \overset{\vee}{=} \frac{4!(7\times6\times5-5)}{4!} = 7\times6\times5-5 = 205$$

$n \geqslant 2$ $\quad C = \dfrac{n!}{(n-2)!} = \dfrac{n\times(n-1)\times\overbrace{(n-2)\times\dots\times2\times1}^{(n-2)!}}{(n-2)!} = \dfrac{n(n-1)\times(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$

$D = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} \longrightarrow (n+1)! = n!\times(n+1)$

$$D = \frac{1(n+1)}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$$

2)

$$A = 5\times6\times7\times8\times9\times10$$

$$A = \frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10}{1\times2\times3\times4} = \frac{10!}{4!}$$

$2 \leqslant k \leqslant n$ $\quad B = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$

$$B = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)\times(n-k)\times\dots\times2\times1}{(n-k)\times\dots\times2\times1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exercice 3

On considère l'algorithme ci-contre, où n est un entier naturel non nul.

1. Déterminer ce que contient la variable f en fin d'algorithme pour $n = 4$.
2. Quel est le rôle de cet algorithme ?

```
f ← 1
Pour i allant de 1 à n
    f ← f * i
Fin Pour
```

1) Départ : $f = 1$
- $i = 1$: $f = 1 \times 1 = 1$
- $i = 2$: $f = 1 \times 2 = 2$
- $i = 3$: $f = 2 \times 3 = 6$
- $i = 4$: $f = 6 \times 4 = \boxed{24}$ → Sortie (si $n = 4$)

2) Il calcule la valeur de $n!$

3) Compléter le programme en Python ci-dessous afin que la fonction factorielle retourne en sortie le nombre $n!$, où n est un entier non nul quelconque) :

```
def factorielle(n):
    P=1
    for i in range(1, n+1):
        P=P*i
    return(P)
```

→ $1 \leq i \leq n+1$!!

2) Définition *(arrangement)*

Soient k et n des entiers naturels tels que : $1 \leq k \leq n$, et E un ensemble à n éléments.

On appelle ***k*-arrangement** de E (qui est une abréviation d'arrangement de k éléments de E) ou encore ***k*-uplet d'éléments deux à deux distincts de *E***, tout k-uplet de E formé d'éléments de E ***deux à deux distincts*** (c'est-à-dire ***tous différents, aucune répétition d'élément***). $E = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\} = [\![0;10]\!]$

un quatre arrangement de E :
$(3;4;8;0)$
$(1;2;3;4)$

Exemple

Si $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$, alors $(2 ; 4 ; 1)$ est un 3-arrangement de E.

$(1 ; 2 ; 4)$ est un autre 3-arrangement de E différent du précédent.

Comme pour les k-listes, ***l'ordre des éléments est fondamental dans un k-arrangement.***

> ***Propriété***
>
> Soient k et n des entiers naturels tels que : $1 \leq k \leq n$, et E un ensemble à n éléments.
>
> Le nombre de ***k-arrangements*** de E est égal à : $n.(n-1)\ldots\times(n-k+1)$ (produit de k facteurs).
>
> En utilisant des factorielles, on a : $n(n-1)\ldots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Preuve : Ecrire un k-*uplet* d'éléments de E deux à deux distincts revient à choisir d'abord dans E un premier élément : n choix sont possibles.

Ce choix étant fait, on a alors $n-1$ choix possible pour le second élément du k-*uplet* (pas de répétition !).

Ainsi de suite, les positions $1,2,\ldots,k-1$ du k-uplet étant occupées par un élément de E, il reste donc pour le dernier éléments du k-*uplet*, $n-(k-1)$ éléments de E comme choix possibles.

Dénombrer les k-uplets d'éléments de E deux à deux distincts revient à chercher le cardinal du produit cartésien suivant constituant E :

$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k$ où : $E_1 = E$ (choix du 1° élément *du k-uplet*, noté x_1) ; $E_2 = E_1 - \{x_1\}$ donc $card(E_2) = n-1$.

etc..... $E_k = E_1 - \{x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_{k-1}\}$, donc $card(E_k) = n-(k-1)$.

D'après le principe multiplicatif, on a donc : $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ k-*uplets* d'éléments deux à deux distincts dans E.

Exercice 4

a) Sur un clavier numérique, combien y-a-t-il de codes à quatre chiffres distincts ?

b) Combien de mots de 7 lettres sans aucune lettre répétée peut-on écrire à l'aide de l'alphabet français ?

c) 20 athlètes participent à une compétition. En fin de compétition un podium est constitué d'une médaille d'or, une médaille d'argent et une médaille de bronze.

Déterminer le nombre de podium différents qu'on peut réaliser avec ces 20 athlètes.

a) $(\square ; \square ; \square ; \square)$ — 10 choix, 9 choix, 8 choix, 7 choix

• Il y a : $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ codes à 4 chiffres distincts

b) Exemple : MAGIQUE, ABZUVCR } Il y en a autant que de 7 arrangements de l'ensemble des lettres de l'alphabet.

$\square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square$ — 26 choix, 25, 24, 23, 22, 21, 20

• Il y a : $\underbrace{26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20}_{= 3.315.312.000}$ $\left(\frac{26!}{19!}\right)$ mots de 7 lettres 2 à 2 $\neq$

c) Podium $= (o ; a ; b)$ — 20 choix, 19, 18

• nb de podium $= 20 \times 19 \times 18 = 6840$

(nb de 3-arrangements de $[\![1 ; 20]\!]$)

d) Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire une première boule de l'urne, puis sans la remettre, on tire une seconde boule de l'urne, et enfin sans remettre les boules tirées on procède à un troisième tirage de boule de l'urne.

Déterminer le nombre de tirages possibles de ces trois boules de l'urne, en tenant compte de l'ordre.

d) Tirages successifs SANS Remise de trois boules de l'urne.

$(x_1 ; x_2 ; x_3)$ — 10 ch, 9 ch, 8 ch

On cherche le nb de 3-arrangements de $E = [\![1 ; 10]\!]$

• Il y a donc : $10 \times 9 \times 8 = 720$ tirages possibles

3) Permutations

Définition

n est un entier naturel non nul et E un ensemble à n éléments.

Une ***permutation de** E* est un ***n-uplet*** d'éléments deux à deux distincts de E.

" arrangement de tous les éléments de E "

Exemples

Si $E = \{a ; b ; c\}$, alors le triplet $(b ; a ; c)$ est une permutation de E. $(c ; b ; a)$ est une autre permutation de E.

Déterminer toutes les permutations de l'ensemble E et préciser leur nombre.

$(a ; b ; c)$; $(a ; c ; b)$; $(b ; a ; c)$; $(b ; c ; a)$; $(c ; a ; b)$; $(c ; b ; a)$: Il y a 6 permutations de E

Propriété

♥♥ ***Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments ($n \geq 1$) est égal à :*** $n!$ ♥♥

Preuve : Il suffit d'appliquer la propriété précédente qui donne le nombre de k-uplets de E lorsque $k = n$.

Le nombre de n-arrangements de E, c'est-à-dire le nombre de permutations de E est égal à :

$n(n-1)\ldots\ldots(n-n+1) = n(n-1)\ldots.\times 1 = n!$

***Remarque** : dans une permutation, l'ordre des éléments est fondamental, et tous les éléments de E figurent une fois et une seule au sein de cette permutation.*

Exercice 5

1) Combien de mots de 5 lettres (ayant un sens ou pas) peut-on former avec les 5 lettres du mot *CHIEN* ?

Culture : ces mots sont appelés des anagrammes du mot CHIEN, c'est-à-dire des mots s'écrivant avec exactement les mêmes lettres que celles du mot CHIEN.

2) 10 chevaux font une course. Combien y-a-t-il d'ordre d'arrivée possibles (en supposant qu'il n'y a pas d'ex-aequo et que tous terminent la course) ?

3) Lucie souhaite ranger horizontalement sur un même étage de sa bibliothèque ses 4 livres de Mathématiques différents, 3 livres de Physique différents et 2 livres de SVT distincts.

a) Dénombrer le nombre de façon de ranger tous ses livres.

b) Combien existe-t-il de façons différentes de ranger tous ses livres en les regroupant par matière ?

Exercice 5 : ! Ordre des lettres capital.

1) □ □ □ □ □

5 ch   4 ch   3 ch   2 ch   1 ch

• Il y a : $\underbrace{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{5!} = 120$ arrangements du mot chien.

(Autant que de permutations de l'ensemble de 5 lettres du mot chien)

2) $10!$: autant que de permutations d'un ensemble à 10 éléments

3) (| M_1 | P_1 | M_2 | S_1 | P_2 | S_2 | P_3 | M_3 | M_4 |)

a) Les 9 livres sont deux à deux distincts

Il y a $9! = 362\,880$ façons de placer les 9 livres sur l'étagère.

b) Il y a $3! = 6$ façons de permuter les matières M; P; S :

(M; P; S) (M; S; P) ; (S; M; P) ; (S; P; M) ; (P; S; M) ; (P; M; S)

- Pour les maths il y a 4 livres, donc $4!$ façons de les ranger côte à côte.
- De même, il y a 3 livres de Φ (phi/maj), donc $3!$ façons de les ranger côte à côte.
- Enfin, il y a 2 livres de SVT, donc $2!$ façons de les ranger côte à côte.

→ Par le principe multiplicatif, on a :

$N = 4! \times 3! \times 2!$ façons de ranger les livres

$N = 2! \times (3!)^2 \times 4!$

$N = 2 \times 6^2 \times 24 = 2 \times 36 \times 24 = 1728$

Lucie à 1728 façons de placer ses livres en les regroupant par matière.

3) | 1 | 2 | . . . . . . | 75 |

75 ch, 74 ch, 1 ch

→ Il y a $75!$ façons de les placer

$75! \approx 2{,}48 \times 10^{109}$

$75! \gg 10^{80}$ car $10^{109} \gg 10^{80}$

Exercice 6

On prendra pour longueur d'une année 365 jours.

1) Dans une classe de 23 élèves, déterminer la probabilité qu'il y ait au moins deux élèves qui aient la même date d'anniversaire (indépendamment de l'année de naissance).

Donner la valeur exacte à l'aide de factorielles, puis une valeur approchée au centième près (utiliser Python, votre calculatrice risque d'être en dépassement de capacité sinon).

2) Reprendre cette question avec une classe de 31 élèves, puis une autre classe de 35 élèves, puis une assemblée de 50 personnes.

Ces résultats vous surprennent-ils ?

1) M = " Au moins deux élèves nés à la même date "

$\overline{M}$ = " Aucun des 23 élèves n'a la même date d'anniversaire "

ou $\overline{M}$ = " Les 23 dates d'anniv sont ≠ "

$(a_1 ; a_2 ; a_3 ; \dots ; a_{22} ; a_{23})$

365 ch, 364 ch, 363 ch, 344 ch, 343 ch

- Il y a : $365 \times 364 \times \dots \times 343$ façons d'écrire 23 dates deux à deux ≠

$365 \times 364 \times \dots \times 343 = \dfrac{365 \times 364 \times \dots \times 343 \times 342 \times \dots \times 2 \times 1}{342 \times 341 \times \dots \times 2 \times 1} = \dfrac{365!}{342!}$

Enfin, il y a 365^{23} façons d'écrire 23 dates sans restrictions : 365^{23} card de l'univers des possibles

Donc $P(\bar{M}) = \dfrac{\text{nb cas favorables}}{\text{nb cas total}}$

$$P(\bar{M}) = \frac{\frac{365!}{342!}}{365^{23}} = \frac{365!}{342!\,365^{23}}$$

Donc $P(M) = 1 - P(\bar{M}) = 1 - \dfrac{365!}{342!\,365^{23}} \approx 0{,}507$

- classe de 25 élèves : $P(M) = 1 - \dfrac{365!}{340!\,365^{25}} \approx 0{,}569$
- // 31 élèves : $P(M) = 1 - \dfrac{365!}{334!\,365^{31}} \approx 0{,}730$
- // 35 élèves : $P(M) = 1 - \dfrac{365!}{330!\,365^{35}} \approx 0{,}814$
- // 50 élèves : $P(M) = 1 - \dfrac{365!}{315!\,365^{50}} \approx 0{,}970$

↳ $P(\text{25 e tous nés le m̂ j}) = 365 \times \left(\dfrac{1}{365}\right)^{25} = \dfrac{1}{365^{24}} \approx 3\times 10^{-62}$

4) Combinaisons

Définition

Soit n un entier naturel et E un ensemble à n éléments et k un entier naturel tel que : $0 \leq k \leq n$.

♥♥On appelle ***combinaison de k éléments de E toute partie*** (= sous-ensemble) ***de E ayant k éléments, (c'est-à-dire de cardinal k).*** ♥♥

Exemple

Si $E = \{1;2;3;4;5\}$, alors $\{1 \ ; 5\}$ est une combinaison de deux éléments de E.

$\{5 \ ; \ 1\}$ désigne la même combinaison que $\{1 \ ; \ 5\}$! → Dans un ensemble $\{\ \}$ il n'y a pas d'ordre

D'après le paragraphe initial sur les ensembles, on peut donc dire que :

Remarques fondamentales

- *Dans une combinaison, l'ordre des éléments n'intervient pas !*
- *Dans une combinaison, il n'y a aucune répétition d'élément !*
- *Si $p > n$, alors il n'y a aucune (=0) combinaison de p éléments dans un ensemble de cardinal n.*

Notation

Le nombre de combinaisons de k éléments pris parmi les n éléments de E se note : $\dbinom{n}{k}$ et se lit :

k parmi n. ♥♥ *Le nom savant de* $\dbinom{n}{k}$ *est coefficient binomial*♥♥.

Exemple

Soit $E = \{a \ ; b\}$. Ici, $card(E) = $ ..2.., donc $n = $ .2.

1a) Ecrire la liste des combinaisons de E formées d'un seul élément : $\{a\}$; $\{b\}$ donc $\dbinom{2}{1} = 2$

1b) Combien y a-t-il de telles combinaisons ? En déduire la valeur de $\binom{2}{1}$. $\longrightarrow$ Car il y a 2 singletons dans E

2) Combien vaut $\binom{2}{2}$? Pourquoi ? Et $\binom{2}{0}$?

$\binom{2}{2} = 1$ car il y a une seule partie de E qui contient 2 éléments c'est $E = \{a ; b\}$

$\binom{2}{0} = 1$ car il y a une seule partie de cardinal 0 contenue dans E : l'ensemble vide

Nous allons établir une relation fondamentale permettant de calculer la valeur de $\binom{n}{k}$.

Propriété clé

Soient n et k deux entiers naturels tels que : $0 \leq k \leq n$.

♥♥ $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ ♥♥

<u>Remarque</u> : si $k \geq 1$, alors $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\times\ldots\times 2\times 1}$ (<u>notation en extension</u>).

<u>Cas particulier récurrents</u> : ♥♥ $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{n} = 1$

Si $n \geq 2$, $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ ♥♥

Calculer (sans calculatrice), la valeur exacte de $\binom{10}{7} = \dfrac{10!}{7!\times(10-7)!} = \dfrac{10!}{7!\times 3!} = \dfrac{10\times 9\times 8\times 7!}{7!\times 6} = 120$

<u>Remarque</u> :

Avec la calculatrice : calculs, touche valise, probabilité, dénombrement, et choisir $\binom{n}{k}$ en faisant entrée, puis taper les valeurs de k et n voulues.

- $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = \dfrac{n!}{0!\,n!} = \dfrac{1}{1} = \boxed{1}$

- $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = \dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{n\times(n-1)!}{(n-1)!} = \boxed{n}$

- $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{n!(n-n)!} = \dfrac{n!}{n!\,0!} = \dfrac{1}{1} = \boxed{1}$

<u>Preuve</u> :

Prouver que : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ revient à prouver :

$$\binom{n}{k} \times k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Or dans un ensemble de card n, il y a $\frac{n!}{(n-k)!}$ arrangements de ces k elements.

$$(p_1 ; p_2 ; \dots ; p_k)$$

n ch $\quad$ $n-1$ ch $\quad$ $n-k+1$ ch

- $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de E qui ont k éléments
- A chacune de ces parties on associe $k!$ permutations de ses éléments

Donc : $\binom{n}{k} \times k! =$ nb d'arrangements de k elts de E $=$ nb de k-listes d'elt 2 à 2 $\neq$ de E

Ainsi : $\binom{n}{k} \times k! = \frac{n!}{(n-k)!}$

Donc : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Exercice 7

Dans le groupe de terminale maths groupe 2, il y a 25 élèves, et on doit choisir trois élèves pour représenter la classe pour une réunion. Déterminer combien de choix on peut faire.

$$C = \{e_1 ; e_2 ; \dots ; e_{25}\}$$

- On doit choisir 3 individus de C ; donc il y a $\binom{25}{3}$ tels choix

$$\binom{25}{3} = \frac{25!}{3 \times 22!} = \frac{25 \times 24 \times 23 \times 22!}{6 \times 22!} = 2300.$$

Exercice 8

1) On a un jeu de belote formé de 32 cartes deux à deux distinctes. Une main de 5 cartes est un ensemble de 5 cartes prises simultanément dans le jeu et dans lequel l'ordre n'importe pas.

Combien y-a-t-il de mains de 5 cartes dans le jeu de belote ?

2) Combien y-a-t-il de mains de 5 cartes contenant 3 cœurs et 2 piques ? On rappelle qu'il y a 8 cœurs et 8 piques dans le jeu de belote.

→ Main de 5 cartes = 5 cartes prises simultanément

a) Il y a autant de mains de 5 cartes dans le jeu que de parties à 5 éléments d'un ensemble de cardinal 32 :

↳ c'est à dire $\binom{32}{5} = \frac{32!}{5!\,27!} = 201\,376$

b) Main $\underbrace{3♡}$ et $\underbrace{2♠}$

$$\binom{3}{8} \times \binom{8}{2} = 56 \times \frac{8\times 7}{2} = 28 \times 56 = 1566.$$

Exercice 9 *(où comment faire rêver les examinateurs au grand oral…)*

Remplir une grille de loto consiste à choisir cinq numéros de 1 à 49 (l'ordre ne compte pas) et un numéro chance de 1 à 10.

a) Combien de grilles différentes de loto peut-on remplir ?

b) Calculer la probabilité de gagner le gros lot, c'est-à-dire d'obtenir les cinq numéros et le numéro chance sortis lors du tirage. Et celle d'avoir "seulement" les cinq numéros ?

Commentaires (2,20€ la grille) ?

c) Combien de grilles sont constituées uniquement de nombres pairs ?

1 grille de loto $\{2\,;\,9\,;\,24\,;\,33\,;\,42\} \times \{7\}$ ↗ = numéro chance

a) $\underbrace{\binom{49}{5}}_{\text{nb choix de 5 num parmi 49}} \times \underbrace{\binom{10}{1}}_{\text{nb de ch de num chance}} = 10 \times \binom{49}{5} = 19\,068\,840$ grilles de loto différentes

n° sorti au tirage

(*) $\binom{5}{5}$

n° choisi par joueur

b) G = gagner le gros lot

$$P(G) = \frac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb total de cas}} = \frac{1^{(*)}}{19\,068\,840} \approx 5\times 10^{-8} \quad (\approx 1 \text{ chance} / 19 \text{ millions})$$

a)

c) $\binom{\text{nb de pairs dans } [\![1;49]\!]}{5} \times \binom{\text{nb pairs dans } [\![1;10]\!]}{1}$

$$\binom{24}{5} \times \binom{5}{1} = 5 \times \binom{24}{5} = 212\,520$$

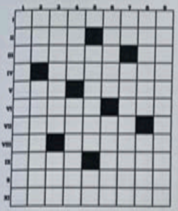
G' = " seulement les 5 bons numéros " ; 9 = nb de possibles pour le n° chance qui ne sera pas tiré.

$$P(G') = 9 \times P(G) = \frac{\binom{5}{5} \times \binom{9}{1}}{19\,068\,840}$$

$$\approx 45 \times 10^{-8} \approx 4{,}5 \times 10^{-7}$$

Exercice 10

La grille rectangulaire ci-contre est une grille de mots croisés :



1) Déterminer le nombre de ces grilles contenant exactement 8 cases noires.

2) Combien de grilles n'ont aucun coin noir ?

3) Combien de grilles ont exactement deux coins en noir ?

1) La grille contient en tout $9 \times 11 = 99$ cases

Colorier 8 cases en noir revient à choisir 8 cases parmi les 99 possibles, donc :

$$\binom{99}{8} = 171\,200\,862\,756$$

2) $\underset{\text{coins}}{99-4}$ $\binom{95}{8} = 121\,550\,931\,645$

3) $$\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{façon de choisir 2 coins parmi 4}} \times \underbrace{\binom{95}{6}}_{\text{reste à choisir 6 cases noires parmi 95 } (\rightarrow \text{ tout sauf coins})} = 6 \times \binom{95}{6} = 5\,214\,646\,710$$

Exercice 11 BAC ⚠

Dans une classe comportant 16 filles et 13 garçons, on doit élire un bureau formé de 4 élèves.

a) Combien peut-on former de bureaux si on n'impose aucune contrainte ?

b) Combien y-a-t-il de tels bureaux respectant la parité ?

a) $16 + 13 = 29$ élèves dans la classe

→ On doit choisir 4 de ces élèves donc il y a : $\binom{29}{4}$ bureaux

$$\binom{29}{4} = \frac{29!}{4!\,25!} = \frac{29 \times 28 \times 27 \times 26}{24} = 23\,751 \text{ choix.}$$

b) Parité : autant de ♀ que de ♂

Donc ici on veut un bureau avec : 2 ♀ et 2 ♂

$$\underbrace{\binom{16}{2}}_{\text{nb de façons de choisir 2 ♀ parmi les 16}} \times \underbrace{\binom{13}{2}}_{\text{// 2 ♂ parmi les 13}} = \frac{16\times15}{2} \times \frac{13\times12}{2} = 8\times15\times6\times13 = 9360 \text{ tels bureaux}$$

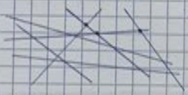
Exercice 12

1*a*) On trace 7 droites du plan de telle sorte que deux droites quelconques tracées ne soient jamais parallèles et que trois droites quelconques tracées ne soient jamais concourantes.

Dénombrer le nombre total de points d'intersection qui apparaissent sur la figure.

1*b*) Sept équipes s'affrontent lors d'un tournoi, chacune devant rencontrer une fois et une seule toutes les autres.

Dénombrer combien de parties on va devoir organiser. (De deux façons différentes).

≈ 

$\Longrightarrow$ 1 pt d'intersection apparait lorsque 2 droites se coupent.

1) a) Il y a autant de pts d'intersection que de façons de choisir 2 droites parmi 7

Donc $\binom{7}{2} = \frac{7\times6}{2} = 21$ pts d'intersection.

1) b) $6+5+4+3+2+1$: CM2 ?

→ autant de matchs que de choix de deux équipes parmi 7 :

$\binom{7}{2} = \frac{7\times6}{2} = 21$ parties

Exercice 13

Un code formé de six chiffres est tapé sur un clavier numérique (constitué des $\overbrace{\text{dix chiffres}}^{0 \text{ à } 9}$).

a) Combien de tels codes contiennent exactement deux fois le chiffre 1 ?

b) Combien de codes ont leurs chiffres rangés par ordre strictement croissant ? (Par exemple, 2-4-5-7-8-9 est un tel code).

c) Combien de codes comporte un chiffre (au moins) répété exactement trois fois ?

ex : $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{1}\ \boxed{8}\ \boxed{0}$ $\quad\square\ \square\ \underset{1}{\boxtimes}\ \square\ \underset{1}{\boxtimes}\ \square$

Etape 1 : on choisit le positionnement des deux chiffres 1 $\binom{6}{2}$ tels choix

Il reste alors à remplir 4 cases avec 9 $(10-1=9)$ chiffres possibles.

Donc on doit écrire une 4-listes de l'ensemble $\{0;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

Donc 9^4 tels choix

Par principe multiplicatif : on a : $\binom{6}{2} \times 9^4$ codes à 6 chiffres avec exactement deux 1 !

càd : $15 \times 9^4 = \boxed{98\,415}$

b) $\boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{7}\ \boxed{8}\ \boxed{9}$

→ On choisi 6 chiffres (dans l'ensemble $[\![0,9]\!]$) : ils sont donc 2 à 2 distincts

Donc $\binom{10}{6}$ choix   parmi les 6 chiffres choisis un est le ① petit ..... un est le ⑥ grand.

Donc 1 seul classement par ordre ↗ de ces 6 chiffres

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{24 \times \cancel{6!}} = \boxed{210}$$

c) ex : $\boxed{8}\ \boxed{7}\ \boxed{4}\ \boxed{8}\ \boxed{8}\ \boxed{6}$

On choisi un chiffre (qui va être répété 3 fois)

$\binom{10}{1} = 10$ choix possibles du chiffre répété

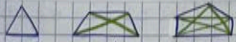
- On place alors ce chiffre sur 3 cases, donc : $\binom{6}{3}$ positionnements de 3 chiffres répétés
- Reste alors à placer 3 chiffres : pour chacuns d'entres eux on a 9 possibles

Par p^4 x : $10 \times \binom{6}{3} \times 9^3 = \boxed{145\,800}$ codes ont un chiffre répété exactement 3 fois

Exercice 14

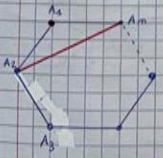
Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

Déterminer le nombre de diagonales (= segment reliant deux sommets non consécutifs) d'un polygone convexe à n côtés.



$n = 3$ $d = 0$; $n = 4$ $d = 2$; $m = 5$ $d = 5$

∞



- On relit A_1 à tous les sommets sauf A_2 et A_m càd à $m-3$ choix possibles.

Pour A_2 : idem
Pour A_m : idem

Donc $\frac{(m-3) \times m}{2}$ diagonales

Méthode BIS : On choisi 2 pts parmi m sommets : $\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$ possibilités

Parmis ces $\frac{m(m-1)}{2}$ segments créés il y a les diagos du polygone et les m côtés du poly.

Donc on a : $\frac{m(m-1)}{2} - m$ diagonales $\quad \frac{m^2 - m - 2m}{2} = \frac{m^2 - 3m}{2} = \frac{m(m-3)}{2}$ diagos

Exercice 15

Dénombrer les anagrammes des mots suivants :

a) POINTER

b) DENOMBREMENT

a) POINTER) aucune lettre répétée

□ □ □ □ □ □ □

7ch 6 5 4 3 2 1

Autant que de permutations d'un ensemble à 7 éléments donc :

$7! = 5040$ anagrammes du mot POINTER.

b) DENOMBREMENT mot de 12 lettres

⚠ lettres répétées : E : ×3 fois et D; O; B; R; T ×1 fois
M ×2 fois
N ×2 fois

□ ☒ ☒ □ □ □ □ ☒ □ ☒ □ □
M N M N

- $\binom{12}{3}$ = nb de placements des 3 E.

$\binom{12-3}{2} = \binom{9}{2}$ = nb de façon de placer les 2 M

$\binom{9-2}{2} = \binom{7}{2}$ = nb // les 2 N sur les places restantes

- Il reste à placer les 5 lettres : D, O; B, R; T sur les 5 places restantes

donc $5! = 120$ permutations possibles

Par p^te ⊗, on a : $\binom{12}{3} \times \binom{9}{2} \times \binom{7}{2} \times 5! = 19\ 958\ 400$ arrangements de ce mot.

Autre méthode : Je place les 5 lettres non répétées $\binom{12}{5}$ places

on permute ces 5 lettres : 5! possibles

$\binom{12}{5} \times 5!$ = nb de façons d'écrire ces 5 lettres sur 5 places du mot.

- Pour les 3E : $\binom{7}{3}$ choix
- // 2M : $\binom{4}{2}$ choix
- // 2N : $\binom{2}{2}$ choix

$\binom{12}{5} \times 5! \times \binom{7}{3} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2} = 19\ 958\ 400$ arrangements.

Exercice 16

Un bit est une unité qui ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1.

On appelle *octet* tout ensemble ordonné formé de 8 bits.

a) Donner le nom mathématique d'un octet.

b) Combien y-a-t-il d'octets différents en tout ?

c) Combien d'octets commencent par 0 et finissent par 1 ?

d) Combien d'octets contiennent exactement trois 1 ?

e) Combien d'octets contiennent plus de 0 que de 1 ?

Un octet : 00111001

a) un octet c'est un 8-uplet d'éléments de l'ensemble $\{0;1\}$

b) $\square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square$

Donc $2^8 = 256$ octets

c) $\boxed{0}\ \underbrace{\dots\dots}_{2\ \text{choix}}\ \boxed{1}$: $2^6 = 64$ tels octets

d) $\boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}$

$\binom{8}{3}$ = nb de façons de placer les 3 uns

Reste à placer 5 fois le chiffre 0 sur les 5 places restantes

$\binom{5}{5} = 1$ possible

Par principe multiplicatif : $\binom{8}{3} \times 1 = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8\times7\times6}{6} = 56$

e) Possibles : Soit ① 8 zéros et aucun 1 : $8>0$

〃 ② 7 zéros et un seul 1 : $7>1$

〃 ③ 6 zéros et deux 1 : $6>2$

〃 ④ 5 zéros et trois 1 : $5>3$

① 1 seul code 1^8

② $\binom{8}{1}$ placement du chiffre 1 : 8

③ $\binom{8}{2} \times 1^6 = \binom{8}{2} = 28$

④ q.d) : 56

→ Par principe additif : Il y a $1+8+28+56 = 93$ octets ont plus de 0 que de 1.

Propriété de symétrie du nombre de combinaisons

Soient n et k deux entiers naturels tels que : $0 \leq k \leq n$. Alors ♥♥ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ♥

Preuve :

si $0 \leq k \leq n$
alors $-n \leq -k \leq 0$
donc $0 \leq n-k \leq n$

Méthode 1 : Par le calcul, en utilisant les factorielles : $\binom{n}{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)! \times \underbrace{(n-(n-k))!}_{=k}} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$

ex : $\binom{30}{29} = \binom{30}{1} = 1$ $\qquad \binom{9}{7} = \binom{9}{2} = \dfrac{9 \times 8}{2} = 36$

Méthode 2 : (préférable)

Soit E un ensemble a n éléments, vu que $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k}$ est donc le nombre de parties de E constituées de k éléments distincts de E.

Or, à chacune des parties de E constituée de k éléments distincts correspond une unique partie de E contenant tous les autres éléments de E, au nombre de $n-k$ (appelée la partie complémentaire de la partie choisie dans E).

Il y a donc autant de parties de E à k éléments que de parties de E à $n-k$ éléments.

Or le nombre de parties de E à $n-k$ éléments est égal à : ……….

D'où la relation.

Exemple

Calculer astucieusement : $\binom{30}{29}$; $\binom{9}{7}$.

S'écrit encore :
$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Propriété *: relation du triangle de Pascal*

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier k tel que : $1 \leq k \leq n-1$, on a : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Preuve : Méthode 1 : avec du calcul et des factorielles :

$1 \leq k \leq n-1$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \times (n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k! \times (n-1-k)!}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!}$$

Un dénominateur commun à ces deux fractions est : $k! \times (n-k)!$

CAR : $k!$ est un multiple de $(k-1)!$ et $k! = k! \times (k-1)!$
$(n-k)!$ est multiple de $(n-k-1)!$ et $(n-k)! = (n-k)(n-k-1)!$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!}$$

facteur commun

$$= \frac{k \times (n-1)!}{k!\,(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k! \times (n-k)!} = \frac{k\overbrace{(n-1)!}+(n-k)\overbrace{(n-1)!}}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)!\times(k+n-k)}{k!\,(n-k)!}=\frac{(n-1)!\times n}{k!\,(n-k)!}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

Méthode 2 : (*par le dénombrement, donc préférable*).

Soit E un ensemble à n éléments, où $n \geq 1$ et k un entier tel que $1 \leq k \leq n-1$.

On sait que $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de E à k éléments distincts.

Soit x un élément quelconque de l'ensemble E :

Il existe deux sortes de parties de E à k éléments distincts :

Celles qui contiennent l'élément x et celles qui ne contiennent pas l'élément x.

Or les parties de E à k éléments contenant l'élément x sont au nombre de $\binom{n-1}{k-1}$: en effet, fabriquer une partie de E à k éléments revient à adjoindre à l'élément x $k-1$ autres éléments de E.

Les parties de E à k éléments ne contenant pas l'élément x sont au nombre de $\binom{n-1}{k}$ en effet, fabriquer une parie de E à k éléments ne contenant pas l'élément x revient à fabriquer une partie à k éléments d'un ensemble qui contient $n-1$ éléments.

D'après le principe additif, on a donc : (dessin). $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$

En fait la formule précédente donne un algorithme pour calculer de proche en proche, à l'aide d'un tableau les coefficients binomiaux.

Pour ce faire, on se souvient que : $\binom{0}{0}=1$ et que pour tout entier n, $\binom{n}{0}=1=\binom{n}{n}$.

Considérons le tableau à double entrée suivant :

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	$\binom{0}{0}=1$	0	0	0	0	0	0	0
1	$\binom{1}{0}=1$	$\binom{1}{1}=1$	+ 0	0	0	0	0	0
2	$\binom{2}{0}=1$	+ 2	+ 1	0	0	0	0	0
3	1	+ 3	+ 3	+ 1	0	0	0	0
4	1	+ 4	+ 6	+ 4	+ 1	0	0	0
5	1	+ 5	+ 10	+ 10	+ 5	1	0	0
6	1	+ 6	+ 15	+ 20	+ 15	6	1	0
7	1	7	+ 21	35	35	21	7	1

On complète donc la colonne correspondant à $k = 0$ avec des 1 et la diagonale correspondante à $k = n$ avec des 1 : au-dessus de la diagonale précédente, on ne met rien (car si $k > n$, alors $\binom{n}{k}=0$, donc cette partie- là du tableau n'a aucun intérêt (vous pouvez la remplir de 0 si le cœur vous en dit !).

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1		1				
3	1			1			
4	1				1		
5	1					1	
6	1						1

On complète ce tableau grâce à la relation de *Pascal* que l'on réécrit en :

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=$$

$$\binom{n+1}{k+1}$$: *nouveau coefficient binomial*

Par exemple

Compléter alors ce tableau de proche en proche.

Pourquoi le nom de triangle de Pascal ?

On peut représenter comme suit les coefficients binomiaux, et un triangle apparait alors clairement :

En première ligne, un seul coefficient, 1 qui représente le nombre $\binom{0}{0}$.

En seconde ligne, deux coefficients qui sont respectivement de gauche à droite : $\binom{1}{0}$ et $\binom{1}{1}$

En troisième ligne, trois coefficients qui sont respectivement de gauche à droite : $\binom{2}{0};\binom{2}{1};\binom{2}{2}$.

Ainsi de suite...on peut compléter ce dernier avec autant de lignes que l'on veut.

Triangle de Pascal donnant les valeurs de $\binom{n}{k}$ pour tous entiers k et n tels que : $0 \leq k \leq n \leq 10$.

k ↓

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
n ⟶ 1 $\boxed{5}$ 10 10 5 1 $\binom{5}{1} = 5$
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 $\boxed{28}$ 8 1 $\binom{9}{6} = 28$
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 <u>252</u> 210 120 45 10 1 $\binom{10}{5} = 252$

Exercice 17

n est un entier naturel non nul.

Par le dénombrement, prouver la formule du capitaine : pour tout entier k tel que : $1 \leq k \leq n$, on a :

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

✎ En pratique ✎ Un problème de dénombrement, ça peut vraiment être compliqué, mais il y a tout de même une trinité merveilleuse de modèles de base auxquels on peut presque toujours se ramener.

Tirages successifs AVEC REMISE = LISTES	Tirages successifs SANS REMISE = ARRANGEMENTS	Tirages SIMULTANÉS = COMBINAISONS

- Un sélectionneur doit constituer une équipe de k joueurs recrutés parmi n sportifs.
- Cette équipe doit contenir un capitaine d'équipe.

→ Pour ce faire le sélectionneur :

Sélectionne le capitaine : $\binom{n}{1} = n$ choix possibles du capitaine.

Et ensuite il doit encore sélectionner $k-1$ joueurs parmi les $n-1$ candidats restants.

Donc $\binom{n-1}{k-1}$ tels choix

<u>Par le principe multiplicatif le recruteur a donc</u> : $n\binom{n-1}{k-1}$ choix d'équipes.

Autre méthode : il sélectionne d'abord k joueurs parmi les n postulants.

$\binom{n}{k}$ tels choix

→ Parmi les k joueurs sélectionnés, il en désigne un comme chef d'équipe : $\binom{k}{1} = k$ choix possibles du capitaine

<u>Par principe $\times$, le sélectionneur a donc</u> : $k\binom{n}{k}$ choix d'équipe.

Donc : $\boxed{n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}}$

Bis :

$$k\binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{k \times n \times (n-1)}{k!(n-k)!}$$

$$k\binom{n}{k} = \frac{k \times n \times (n-1)!}{k!(n-1(k-1))!} = \frac{n \times k \times (n-1)!}{k!(n-1(k-1))!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-1(k-1)!}$$

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$