

Chapitre VI :

« Les mathématiques ne sont pas une moindre immensité que la mer. » Victor Hugo

Chapitre VI

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

I - Continuité d'une fonction

A - Généralités sur la continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a un réel appartenant à l'intérieur de I .

Définition : f est dite continue en a si et seulement si : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Ou encore, f est continue en a si et seulement si $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$.

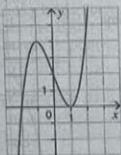
En français, f est continue en a si et seulement si f admet une limite finie en a égale à $f(a)$.

f est continue sur I signifie que f est continue en tout réel a appartenant à I .

Illustration graphique de la notion de continuité

* f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

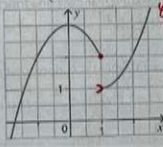
$$f(x) = x^3 - 3x + 2.$$



f est continue sur $\mathbb{R}$.

* f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



f n'est pas continue en 1.

$\circ$ = valeur exclue
 $\bullet$ = valeur incluse
 Ici $f(1) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \boxed{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \boxed{1} \neq$$

Dans le second exemple, f n'est pas continue en 1, et donc f est non continue sur $\mathbb{R}$.

Concrètement, la continuité de f sur I se traduit par le fait que la courbe représentative de f peut être tracée sans lever le crayon du stylo !

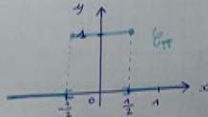
Remarque : le terme continuité n'a pas été choisi de façon anodine, il signifie qu'il n'y a pas de « coupure » dans le graphe de f .

Exercice

La fonction porte, notée Π , est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$



- Dans un repère, tracer la courbe de la fonction Π .
- Sur quels intervalles de $\mathbb{R}$ la fonction Π est-elle continue ?

b) Π est continue sur chacun des intervalles :

$$]-\infty; -\frac{1}{2}[; [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]; [\frac{1}{2}; +\infty[$$

Propriété (admise)

- Les fonctions polynômes, la fonction exponentielle sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
- $x \rightarrow \sqrt{x}$ est continue sur $[0 ; +\infty[$; $x \rightarrow \frac{1}{x}$ est continue sur et sur $]0 ; +\infty[$.
- Sur chaque intervalle où elle est définie, une fraction rationnelle (= quotient de deux polynômes) est continue.
- De façon générale, si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I , et k est un réel, alors les fonctions $kf + g$, fg , $f \cdot$ (n entier naturel non nul) sont continues sur I ; $\frac{f}{g}$ est continue sur les intervalles où elle est définie.
- Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$ et si $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $f(a) \in J$, alors $g \circ f$ est continue en a .

De façon générale, la notion de continuité se transmet en faisant de l'algèbre sur des fonctions continues au départ.

Théorème (être dérivable implique être continue)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a un réel appartenant à l'intérieur de I .

- Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .
- La réciproque est fautive !

Preuve : 1) Pour h non nul : $f(a+h) = f(a) + \frac{f(a+h)-f(a)}{h} h$ permet de conclure instantanément !

En effet : f est dérivable en a , donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$; donc comme $\lim_{h \rightarrow 0} h = 0$

Par produit et somme : $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$

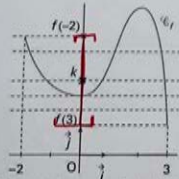
- La fonction racine carrée est continue en 0 mais non dérivable en 0 ! donc f continue en a

Comme cette année on ne manipule presque exclusivement que des fonctions dérivables, ces fonctions à disposition sont donc continues !

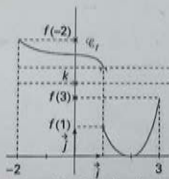
Remarque : Dans un tableau de variations, une flèche sans coupure sur un intervalle indique la continuité de la fonction en question sur cet intervalle.

II - Le théorème des valeurs intermédiaires et ses innombrables conséquences

Approche graphique :



f est continue sur $[-2; 3]$. Pour tout réel k compris entre $f(3)$ et $f(-2)$, l'équation $f(x) = k$ admet une ou plusieurs solutions.

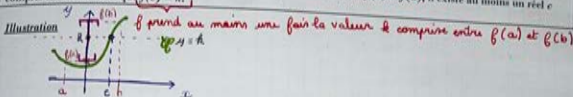


f est définie sur $[-2; 3]$ mais elle n'est pas continue sur $[-2; 3]$. Il existe des réels k compris entre $f(3)$ et $f(-2)$ tels que l'équation $f(x) = k$ n'admet pas de solution.

♥♥♥ Théorème des valeurs intermédiaires (noté T.V.I.) ♥♥♥

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a et b deux réels appartenant à I avec $a < b$.

Si f est continue sur $[a; b]$, alors, pour tout réel k compris entre les réels $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



On admet ce théorème qui est assez intuitif, dont la preuve est moins aisée !

Mémo : ♥♥♥ On retiendra que si f est définie et continue sur $[a; b]$, alors f prend AU MOINS une fois toute valeur intermédiaire k comprise entre $f(a)$ et $f(b)$. ♥♥♥

Remarque : L'équation $f(x) = k$ où k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a; b]$. On ne sait pas lequel des deux réels $f(a)$ et $f(b)$ est le plus grand, donc lorsqu'on dit compris entre $f(a)$ et $f(b)$, ne pas croire que $f(a) < f(b)$!

Le T.V.I va donc permettre de « prévoir » l'existence de solution(s) pour une équation donnée, sur un intervalle.

Application 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[-2; 2]$.

• $f(x) = x^3 + x + 1$

• f est continue sur $[-2; 2]$ car dérivable sur $[-2; 2]$

$f(-2) = (-2)^3 + (-2) + 1 = -9$

$f(2) = 2^3 + 2 + 1 = 11$

$0 \in [-9, 11]$ (car $-9 \leq 0 \leq 11$)

0 est une valeur intermédiaire pour f

Donc d'après le T.V.I., l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[-2; 2]$

Application 2

Montrer que l'équation : $e^{3x+1} = x+4$ a au moins une solution sur $[-5; 0]$.

• $e^{3x+1} = x+4$, avec ici $-5 \leq x \leq 0$

• On se ramène à un second membre nul

• $e^{3x+1} = x+4 \Leftrightarrow e^{3x+1} - x - 4 = 0$

Soit f la fonction définie sur $[-5; 0]$ par : $f(x) = e^{3x+1} - x - 4$

• f est continue sur $[-5; 0]$ car dérivable sur cet intervalle

• $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[-5; 0]$

• $f(-5) = e^{3(-5)+1} - (-5) - 4 = e^{-14} + 1 (\approx 1)$

$f(0) = e^{3(0)+1} - 0 - 4 = e^1 - 4 = e - 4 (\approx -1,28)$

Donc $0 \in [e^{-4}; e^{-14} + 1]$ car $e^{-14} + 1 \approx 1$ et $e^{-4} \approx -1,282$.

- Donc d'après le TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[-5; 0]$

Application 3 (principe de Bolzano, important)

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ telle que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.

Montrer que f s'annule au moins une fois sur $[a; b]$.

" f s'annule au moins une fois sur $[a; b]$ "

↳ signifie que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[a; b]$

* $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$, donc $f(b) < 0 < f(a)$
 0 est valeur intermédiaire pour f .

- Donc d'après le T.V.I., $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[a; b]$

Corollaire du T.V.I. : (capital, c'est de lui dont on se servira fréquemment en terminale).

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a et b deux réels appartenant à I avec $a < b$.

Si f est continue sur $[a; b]$, et si f est strictement monotone sur $[a; b]$ (c'est-à-dire f est strictement croissante sur $[a; b]$ ou f est strictement décroissante sur $[a; b]$), alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur $[a; b]$.

Preuve :

- Toutes les conditions nécessaires à l'application du TVI sont remplies. Donc $f(x) = k$ admet au moins une solution $[a; b]$

- Supposons que : $f(x) = k$ admette deux solutions distinctes sur $[a; b]$

$$\begin{aligned} f(x_1) &= k \\ f(x_2) &= k \end{aligned}$$

Notons les x_1 et x_2 avec par exemple : $a \leq x_1 < x_2 \leq b$

Si f est strict. croissante, alors (sur $[a; b]$) :

$$f(x_1) < f(x_2)$$

$$k < k : \text{absurde}$$

- Si f est strictement décroissante sur $[a; b]$, alors comme $x_1 < x_2$

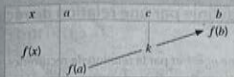
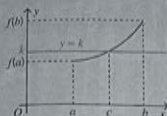
$$\text{on aurait } f(x_1) > f(x_2)$$

Donc $f(x) = k$ n'admet pas deux solutions distinctes $k > k$: absurde

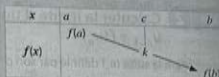
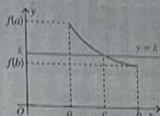
Donc $f(x) = k$ admet une unique solution sur $[a; b]$

Illustration

* Cas où f est strictement croissante :



* Cas où f est strictement décroissante :



Remarques importantes

Trois conditions sont nécessaires pour pouvoir appliquer ce corollaire du T.V.I :

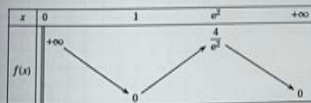
- 1) f doit être continue sur $[a; b]$.
- 2) f est strictement monotone sur $[a; b]$.
- 3) k est une valeur intermédiaire pour f comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

Le corollaire du T.V.I. s'applique aussi sur un intervalle de la forme : $[a; b[$; $]a; b]$; $]a; +\infty[$; $]a; +\infty[$; $]-\infty; b[$; $]-\infty; b]$.

Si l'intervalle est ouvert en une borne a ou b est ouverte, alors on remplace l'image $f(a)$ ou $f(b)$ par la LIMITE de f en cette borne ; si une borne de l'intervalle est $-\infty$ (ou $+\infty$), alors on considère la limite de f en $-\infty$ (ou en $+\infty$).

⚠ Pour un intervalle, la borne écrite à gauche est toujours inférieure à celle écrite à droite : ainsi écrire 0 appartient à $[4; -2]$, ou encore 1 appartient à $] +\infty; 0[$ sont des inexactitudes. ⚠

Exercice graphique



⚠ Limite en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Déterminer, en justifiant, le nombre de solutions de chacune des équations suivantes sur l'intervalle donné :

- $f(x) = 2$ sur $]0; 1[$.
- $f(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$.
- $f(x) = 0,5$ sur $[1; e^2]$ puis sur $]0; +\infty[$.
- $f(x) = -1$ sur $]0; +\infty[$.

a) $f(x) = 2$ sur $]0; 1[$

$\Rightarrow f$ est continue sur $]0; 1[$.

$\Rightarrow f$ est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, donc 2 est une valeur intermédiaire pour f .

$\Rightarrow 2 \in$

Donc d'après le C.T.V.I, $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]0, 1]$
 1 et même sur $]0, 1[$, car $f(1) = 0 \neq 2$

b) $f(x) = 0$ sur $]0, +\infty[$

D'après le tableau de variations :

$f(x) = 0$ admet pour unique solution $x = 1$ sur $]0, +\infty[$

$\Delta \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$: 0 valeur non atteinte (limite)

c) $f(x) = 0,5$ avec $x \in [1, e^2]$

* f est continue et strictement croissante sur $[1, e^2]$

$\rightarrow$ De plus $\frac{4}{e^2} \approx 0,54$, donc $0,5 \in [0, \frac{4}{e^2}]$

D'après le C.T.V.I, $f(x) = 0,5$ admet une unique solution sur $[1, e^2]$

même principe en subdivisant cet intervalle en

3 : $[0, 1]$, $[1, e^2]$, $[e^2, +\infty[$: sur chacun des intervalles

$f(x) = 0,5$ admet une unique solution

d) $f(x) = -1$

Grâce au tableau : f admet pour minimum 0 sur $]0, +\infty[$ donc

$\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) \geq 0$, donc $f(x) = -1$ n'admet aucune solution sur $]0, +\infty[$

Exercice 2

f est définie sur $[0; 2]$ par : $f(x) = -x^3 - x + 3$.

a) Démontrer que f est strictement décroissante sur $[0; 2]$ et dresser son tableau de variation.

b) En déduire que l'équation : $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0; 2]$.

$\rightarrow x \in [0, 2]$
 f définie sur $[0, 2]$ par : $f(x) = -x^3 - x + 3$

a) $f'(x) = -3x^2 - 1$

On $\forall x \in [0, 2]$; $x^2 \geq 0$, donc $-3x^2 \leq 0$ donc $-3x^2 - 1 \leq -1 < 0$

donc ; $f'(x) < 0$ donc f strictement décroissante sur $[0, 2]$

x	0	2
$f(x)$	3	-7

• $f(0) = 3$

• $f(2) = -2^3 - 2 + 3 = -7$

b) *) f est dérivable sur $[0; 2]$ donc est continue sur $[0; 2]$

**) f est strictement décroissante sur $[0; 2]$

**) $-7 \leq 0 \leq 3$; donc 0 est une valeur intermédiaire pour f

$\Rightarrow$ Donc d'après le Corollaire du th. des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$, admet une unique solution sur $[0; 2]$.

On note α : ainsi $f(\alpha) = 0$
et $0 \leq \alpha \leq 2$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x + x - 2$.

- Démontrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ et dresser son tableau de variation.
- Démontrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ notée α .
- Encadrer α à l'unité près, puis au dixième près, puis à 10^{-2} près à l'aide de votre calculatrice. (Méthode des balayages successifs).
- Etudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Bien retenir cette façon de faire pour déterminer le signe des valeurs prises par une fonction sur un intervalle.

$$f(x) = e^x + x - 2$$

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

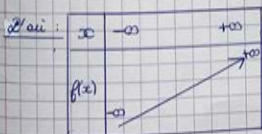
$$f'(x) = e^x + 1$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$; donc $e^x + 1 > 1 > 0$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Par limites de références : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty$

Donc par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2) = -\infty$

Donc par somme : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

c) *) f est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$

**) f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

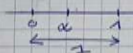
**) $0 \in]-\infty; +\infty[$

Donc d'après le C.T.V.I., l'équation $f(x) = 0$, admet une unique solution, notée α avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

d) On cherche ici un réel i tel que : $i < \alpha < i+1$
l'amplitude de cet encadrement vaut 1

d'après la machine : $\alpha \approx 0,4428544$

Donc : $0 < \alpha < 1$: encadrement de α à l'unité près



Mais aussi : $0,12 < \alpha < 1,12$ est aussi un encadrement de α à l'unité près

$\rightarrow 0,4 < \alpha < 0,5$ encadrement de α au dixième près

$$\rightarrow 10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$$

$0,44 < \alpha < 0,45$: enc. de α à 10^{-2} près.

e) f croît sur $\mathbb{R}$; et $f(\alpha) = 0$

Donc $\forall x \in]-\infty ; \alpha[$, $f(x) \leq 0$

$\forall x \in [\alpha ; +\infty[$, $f(x) \geq 0$

Donc :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

$f(\alpha) = 0$

On se contentera, dans les exercices, de donner une valeur approchée de chaque solution, avec la précision que l'on nous demandera. L'utilisation d'une calculatrice sera nécessaire.

III- Continuité et suite récurrentes

Propriété (admise)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , et a un réel appartenant à I .
Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n , $u_n \in I$.

1) Si (u_n) converge vers a , alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

2) Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est continue sur I .

Si (u_n) converge vers $L \in I$, alors L est solution de l'équation : $L = f(L)$. L est un pt fixe de f ; cad L est solution de $f(x) = x$ sur I

Schéma : $\heartsuit \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n)$ dès que f est continue en a où $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. $\heartsuit$

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = -5$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n + 3}$.

1) Soit f la fonction définie sur $[0; 2]$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x + 3}$.

Etudier le sens de variation de f sur $[0; 2]$ et dresser son tableau de variation.

2) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

3) En déduire que (u_n) converge, puis calculer sa limite.

$$u_0 = -5 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n + 3}$$

1) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ où f est définie sur $[0; 2]$

par : $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x + 3} = \sqrt{u(x)}$ où $\begin{cases} u(x) = \frac{1}{2}x + 3 \\ u'(x) = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \quad \Delta \quad \heartsuit$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{1}{2}x + 3}} = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{2}x + 3}} > 0$$

$\hookrightarrow$ car $\sqrt{\frac{1}{2}x + 3} > 0$
puisque $x \in [0; 2]$ et $4 > 0$

Donc f est strictement croissante sur $[0; 2]$

Q'au :

x	0	2
$f(x)$	$\sqrt{3}$	2

$$= f(0) = \sqrt{3}$$

$$= f(2) = 2$$

2) $n \geq 1$; soit $P(n)$ la propriété $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$

Initialisation : Pour $n = 1$

$$u_1 = f(u_0) = f(-5) = \sqrt{\frac{1}{2}(-5) + 3} = \sqrt{\frac{-1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$$

$$u_2 = f(u_1) = \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 3} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4} + 3} \approx 1,8$$

Ainsi on a : $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 2$; Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier non nul fixé tel que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire :

$$(0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2) \quad \text{H.R.}$$

Il faut que $P(n+1)$ soit vraie, c'est-à-dire : $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$ BUT

$\rightarrow$ Par hypothèse de récurrence : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$

Donc par croissance de f sur $[0; 2]$:

$$\underbrace{f(0)}_{\sqrt{3}} \leq \underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}} \leq \underbrace{f(u_{n+1})}_{u_{n+2}} \leq \underbrace{f(2)}_{2}$$

Or $0 \leq N_3$; donc : $0 \leq u_{m+1} \leq u_{m+2} \leq 2$: $P(m+1)$ est vraie

Conclusion : $P(1)$ est vraie , et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P(n)$ est héréditaire

Donc d'après le pth de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* ; 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2}$$

3) D'après q2 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq u_{n+1}$, donc (u_n) croît à partir du rang 1

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$; donc (u_n) est majorée par 2
(car $u_0 = -5$)

Donc d'après le th de convergence des suites monotones : (u_n) converge.

$\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f dérivable donc continue sur $[0; 2]$

Or (u_n) converge vers $l \in [0; 2]$; d'après q2)

Donc f est continue en l et on a :

$$f(l) = l$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}l+3} = l \quad \rightarrow \text{élever au carré}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2}l+3 = l^2$$

$$l^2 - \frac{1}{2}l - 3 = 0$$

$$\frac{2l^2 - l - 6}{2} = 0$$

$$2l^2 - l - 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$$

$$(b = -1 ; c = -6 ; a = 2)$$

$\Delta > 0$ donc deux racines :

$$\begin{cases} l_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-7}{4} = -1,5 \\ l_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+7}{4} = 2 \end{cases}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \in [0; 2]$; donc $l \in [0; 2]$

$$\text{Donc } l = 2 : \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2}$$

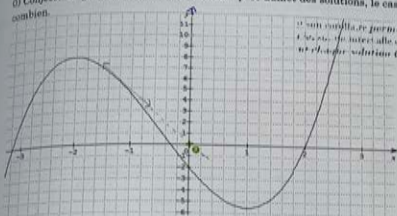
Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 1,5x^2 - 6x - 2$.

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; 1; 1)$.

Le but de l'exercice est de chercher s'il existe des tangentes à C_f passant par le point O .

1) Conjecturer graphiquement si le problème posé admet des solutions, le cas échéant, préciser combien.



Il semblerait que pour tout x , la tangente à C_f passant par l'origine du repère existe.

Remarque : La tangente à C_f passant par l'origine du repère existe pour tout x .

- 1) Soit a un nombre réel. Démontrer que la tangente T_a à C_f au point d'abscisse a de C_f passe par l'origine du repère si et seulement si : $f(a) - af'(a) = 0$.
- 2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - xf'(x)$.
 - a) Exprimer $g(x)$ en fonction de x .
 - b) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
 - c) Étudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation complet.
 - d) Démontrer que la fonction g s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$. On note α cette valeur.
 - e) Donner un encadrement de α à 10^{-2} près, puis la valeur approchée de α au dixième près.
 - f) Déterminer le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
- 3) Résoudre alors le problème posé en début d'énoncé.

0) Il semblerait qu'il y ait une seule tangente à C_f qui passe par O .

La droite, c'est en le point d'abscisse environ égale à $-1,2$, la tangente passe par O .

1) $a \in \mathbb{R}$.

T_a : tangente à C_f au point d'abscisse a .

T_a a pour équation réduite : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

T_a passe $O(0;0)$ on a :

$$y_0 = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$0 = f'(a)(0-a) + f(a)$$

$$0 = -a \times f'(a) + f(a)$$

Donc : $f(a) - a \times f'(a) = 0$

$$2) \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) - x f'(x)$$

$$a) f(x) = x^3 + 1,5x^2 - 6x - 2$$

$$f'(x) = 3x^2 + 3x - 6$$

$$\text{Donc } g(x) = x^3 + 1,5x^2 - 6x - 2 - x(3x^2 + 3x - 6)$$

$$g(x) = x^3 + 1,5x^2 - 6x - 2 - 3x^3 - 3x^2 + 6x$$

$$g(x) = -2x^3 - 1,5x^2 - 2$$

$$b) \text{ Par limites de référence : } \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3 = -\infty$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} -1,5x^2 = -\infty$$

$$\text{Donc par somme : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

En $-\infty$: F.T. de type " $+\infty - \infty$ "

$$g(x) = x^2(-2x - 1,5) - 2$$

$$\text{Par limites de référence : } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 1,5) = +\infty$$

$$\text{Donc par produit : } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

at somme

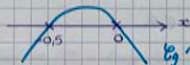
$$c) g(x) = -2x^3 - 1,5x^2 - 2$$

$$g'(x) = -6x^2 - 3x : \text{ trinôme } \begin{cases} b = -3; a = (-6); c = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times (-6) \times 0 = 9$$

$$\Delta > 0 ; \text{ donc deux racines pour l'équation : } g'(x) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{9}}{-12} = 0 \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{9}}{-12} = -0,5 \end{cases}$$



Donc

x	$-\infty$	$-0,5$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$
$g(x)$	$+\infty$	$-2,625$	-2	$-\infty$
$\text{signe } g'(x)$	$+$	$-$	$-$	

$$\bullet g(0) = -2$$

$$\bullet g(-0,5) = -2 \times (-0,5)^3 - 1,5 \times (-0,5)^2 - 2$$

$$g(-0,5) = -2,625$$

d) $\forall x \in [-0,5; +\infty[; g(x) \leq -2$ (tableau)

donc $g(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $[0,5; +\infty[$

Plaçons nous sur $]-\infty; -0,5]$:

- * g est continue sur $[0,5; +\infty[$ car dérivable sur cet intervalle

- ** g strictement décroissante sur $]-\infty; 0,5]$

- *** $0 \in [-2,625; +\infty[$

• Donc d'après le CTVI l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-\infty; -0,5]$

• Soit α l'unique réel tel que $g(\alpha) = 0$

e) trace calculatrice : $-2x^3 - 1,5x^2 - 2$

$\boxed{-1,9224} \Rightarrow -1,33 < \alpha < -1,32$ encadrement à 10^{-2} près.

$\alpha \approx -1,3$ valeur approchée à $0,1$ près

f) voir tableau 3ème type

3) D'après la question 1) la tangente par 0 mène $\underbrace{f(a) - af'(a)}_{g(a)} = 0$

9.2) $g(a) = 0$

donc a est solution de $g(x) = 0$

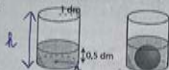
$\hookrightarrow$ D'après 9.2d) $g(x) = 0$ a pour unique solution réelle α .

CONCLUSION : il y a une seule tangente à $\mathcal{C}_f$ en le pt d'abscisse α qui passe par 0

Exercice II

Un vase cylindrique de base un disque de rayon 1 dm, contient de l'eau sur une hauteur de 0,5 dm.

On plonge une bille de diamètre d dm dans ce cylindre et on constate que le niveau de l'eau est tangent à la bille.



1. a) Exprimer en fonction de d le volume, en dm^3 :
• d'eau versé initialement, • de la bille.

b) Exprimer de deux façons différentes le volume du cylindre de hauteur d contenu dans le vase après avoir plongé la bille.

c) En déduire que d vérifie $0 < d < 2$ et :

$$d^3 - 6d + 3 = 0.$$

2. a) Démontrer que l'équation $x^3 - 6x + 3 = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0; 2[$.

b) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du diamètre d de la bille.

a) a) RAPPEL : $V_{\text{cylindre}} = \pi \times r^2 \times h$ $V_{\text{bille}} = \frac{4}{3} \pi R^3$

Donc : $R = 1$ et $h = 0,5$

$\rightarrow V_{\text{eau initiale}} = V_i = \pi \times 1^2 \times 0,5$

$V_i = 0,5 \pi \text{ dm}^3$

$\rightarrow V_{\text{bille}} = V_b = \frac{4}{3} \pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^3$
 $\uparrow$
 $R = \frac{d}{2}$

$V_b = \frac{4\pi}{3} \times \frac{d^3}{8}$

$V_b = \frac{\pi d^3}{6} (\text{dm}^3)$

b) $V_c = V_i + V_b = 0,5\pi + \frac{\pi d^3}{6} (\text{dm}^3)$

$V_c = \pi \times R^2 \times h'$ où $h' = d$ et $R = 1$

$V_c = \pi \times 1^2 \times d = \pi d (\text{dm}^3)$

c) $0 < d < 2$ car : $0 < d$: assure l'existence de la bille

$d < 2$: la bille peut rentrer dans le cylindre.

$V_c = 0,5\pi + \frac{\pi d^3}{6} = \pi d$

d'où :

$0,5\pi + \frac{\pi d^3}{6} = \pi d$

$0,5\pi + \frac{\pi d^3}{6} - \pi d = 0$

$\pi(0,5 + \frac{d^3}{6} - d) = 0$

Donc $0,5 + \frac{d^3}{6} - d = \frac{0}{11} = 0$

$$\frac{d^3}{6} - d + 0,5 = 0$$

$$\frac{d^3}{6} - \frac{6d}{6} + \frac{0,5 \times 6}{6} = 0$$

$$\frac{d^3 - 6d + 3}{6} = 0$$

$\times 6 \left(\begin{array}{c} \boxed{d^3 - 6d + 3 = 0} \end{array} \right. \times 6$

2) a) $x^3 - 6x + 3 = 0$

Soit f la fonction définie sur $]0, 2[$ par : $f(x) = x^3 - 6x + 3$

f est dérivable sur $]0, 2[$ et $f'(x) = 3x^2 - 6$

Signe de $f'(x)$:

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6 \geq 0$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 \geq 6 \Leftrightarrow x^2 \geq 2$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \geq \sqrt{2} \quad \text{car } \sqrt{\cdot} \text{ croît sur } [0, +\infty[$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{2}$$

car $x > 0$

Donc :

x	0	$\sqrt{2}$	2
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

Diagram showing a red arrow from $f(0) = 3$ to $f(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2} + 3 \approx -2,6$ and another red arrow from $f(\sqrt{2})$ to $f(2) = -1$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 3 ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = -1$$

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^3 - 6\sqrt{2} + 3 = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 3 = -4\sqrt{2} + 3 \approx -2,6$$

*) f est continue sur $]0, 2[$ car dérivable

*) Sur $[\sqrt{2}, 2[$, $f(x) < -1$ (cf. tableau)

donc $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[\sqrt{2}, 2[$

Sur $]0, \sqrt{2}[$:

**) f est strictement décroissante sur $]0, \sqrt{2}[$

**) $-4\sqrt{2} + 3 < 0 < 3$ (car $-4\sqrt{2} + 3 \approx -2,6$)

Donc d'après le C.T.V.I, $f(x)$ admet une unique solution sur $]0, \sqrt{2}[$ et donc $]0, 2[$.

écrivons α cette solution :

b) avec la calculatrice

$$0,52 < \alpha < 0,53$$

D'après q.1) c), α est solution sur $]0; 2[$ de $f(x) = 0$

Par unicité de la solution sur $]0; 2[$

$$d = \alpha$$

$$0,52 < d < 0,53$$

Exercice III (métropole 2022)

g est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = (-0,15x + 2,2)e^{0,2x} - 2,2$.

- Déterminer la limite de g en $+\infty$.
- Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $[0; +\infty[$ on a : $g'(x) = (-0,03x + 0,29)e^{0,2x}$.
- Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations sur $[0; +\infty[$.
Préciser une valeur approchée à 10^{-2} près du maximum de g .
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle et déterminer, à 10^{-2} près, une valeur approchée de cette solution.

$$x \geq 0, \text{ et } g(x) = (-0,15x + 2,2)e^{0,2x} - 2,2$$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-0,15x + 2,2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 0,2x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \text{ donc par compacité } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{0,2x} = +\infty$$

Par produit et somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

$$b) g(x) = (-0,15x + 2,2)e^{0,2x} - 2,2 = u(x) \times v(x) - 2,2 \text{ avec :}$$

$$\begin{cases} u(x) = -0,15x + 2,2 \\ u'(x) = -0,15 \end{cases} \quad \begin{cases} v(x) = e^{0,2x} \\ v'(x) = 0,2e^{0,2x} \end{cases}$$

$$\bullet g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad (+0)$$

$$g'(x) = -0,15 e^{0,2x} + (-0,15x + 2,2) \times 0,2 e^{0,2x}$$

$$g'(x) = e^{0,2x} (-0,15 + (-0,15x + 2,2) \times 0,2)$$

$$g'(x) = e^{0,2x} (-0,15 - 0,03x + 0,44)$$

$$g'(x) = (-0,03x + 0,29) e^{0,2x}$$

c) $e^{0,29x} > 0$; donc $g'(x)$ a le même signe que $-0,03x + 0,29$

Donc : $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -0,03x + 0,29 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 0,29 \geq 0,03x$$

$$\Leftrightarrow 0,03x \leq 0,29$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{0,29}{0,03}$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{29}{3}$$

x	0	$\frac{29}{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	2,98	$-\infty$

$$g(0) = 2,2e^0 - 2,2 = 0$$

$$g\left(\frac{29}{3}\right) \approx 2,98$$

machine

d) $g(0) = 0$; et g croît sur $\left[0; \frac{29}{3}\right]$

Donc $g(x) = 0$ n'a pas de solution non nulle sur $\left[0; \frac{29}{3}\right]$

Plaçons-nous sur $I = \left[\frac{29}{3}; +\infty\right[$

*) g est continue sur I car dérivable sur I

**) g est strictement décroissante sur I

***) $0 \in \left]-\infty; 2,98\right]$

$\Rightarrow$ Donc d'après le CTVI l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle sur $\left[0; +\infty\right[$

• Grâce à la machine $13,72421$; Donc $\alpha \approx 13,72$

Donc $\alpha \approx 13,72$

IV - Algorithme de dichotomie

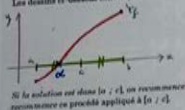
Méthode d'encadrement d'une solution à l'aide d'un algorithme de dichotomie

On considère une fonction f continue et strictement monotone sur $[a; b]$ avec $a \leq b$.
On suppose également que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[a; b]$ que l'on n'a pas déterminée explicitement par le calcul ! On note α cette solution.

Le principe de dichotomie (en gros signifie couper en deux) consiste à déterminer successivement l'intervalle dans lequel se situe α , en divisant par 2 l'amplitude de l'intervalle à chaque itération.

Pour ce faire, on détermine le centre c de chacun des intervalles, et on teste si α est situé dans $[a; c]$ ou $]c; b]$.

Les dessins ci-dessous sont importants :



D'après le corollaire du T.V.I :

Si $f(a) \times f(c) \leq 0$, alors α appartient à $]a; c]$.

Si $f(a) \times f(c) > 0$, alors α appartient à $]c; b]$.

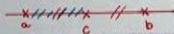
→ car $f(a) \times f(c) < 0$; donc $f(a)$ et $f(c)$ sont de signe contraire.
Donc par C.V.I. $\alpha \in]a; c]$

→ Si $f(a) \times f(c) > 0$; alors $f(a)$ et $f(c)$ sont de même signe.

En itérant cette procédure, on arrive rapidement à encadrer α à la précision voulue.

→ Si $f(a) > 0$ et $f(c) > 0$; par stricte monotonie de f sur $[a; c]$ on a : $f(x) > 0$ sur $[a; c]$; donc $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[a; c]$

→ Or $f(x) = 0$ a une unique solution sur $[a; b]$
Donc la solution appartient à $]c; b]$



Algorithme de Dichotomie : α borne de l'intervalle dans lequel est située la solution α .
Demander à l'utilisateur a, b et ϵ (le désigne l'amplitude de l'encadrement souhaité)
 $\epsilon > 0$.

Tant que $b - a \geq \epsilon$

Affecter à c la valeur $\frac{a+b}{2}$.

Si $f(a) \times f(c) \leq 0$

Alors

Affecter à b la valeur c

Sinon

Affecter à a la valeur c .

Fin de Si.

Fin de Tant que

Sortie : Afficher a et b .

Application

On considère l'équation : $x^3 + 5x + 7 = 0$.

On admet que cette équation a une unique solution sur $[-2; -1]$ car la fonction f définie sur $[-2; -1]$ par :

$f(x) = x^3 + 5x + 7$ est continue, strictement croissante sur $[-2; -1]$ et que $0 \in [f(-2); f(-1)]$ vu que $f(-2) = -11$ et $f(-1) = 1$.

Avec Python : avoir une valeur approchée à 10^{-n} près de l'unique solution α de l'équation $f(x)=0$; l'entier naturel n est choisi par l'utilisateur.

```
def f(x):
    y=x**3+5*x+7
    return y } Déclarer la fonction f

def Dichotomie(n):
    a=-2
    b=1
    while b-a>10**(-n):
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m)<0:
            b=m
        else:
            a=m
    return m
```

$D(1): -1,1171875$ à (10^{-2} près)

Utiliser ce programme, puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près ; 10^{-4} près.

Attention, avant de modifier ce programme et l'appliquer à une autre fonction f , il faudra toujours commencer par prouver que f est continue sur $[a; b]$, strictement monotone sur $[a; b]$ et telle que l'équation : $f(x) = 0$ admet une seule solution sur $[a; b]$!

On peut facilement adapter ce programme pour encadrer l'unique solution sur un intervalle donné d'une équation de la forme : $f(x) = k$ où k est un réel.

$$\begin{aligned} f(x) &= k \\ f(x) - k &= 0 \\ g(x) &= 0 \end{aligned}$$

Soit deux réels a et b avec $a < b$.

On considère une fonction f définie, continue, strictement croissante sur l'intervalle $[a; b]$ et qui s'annule en un réel α .

Parmi les propositions suivantes, la fonction en langage Python qui permet de donner une valeur approchée de α à 0,001 est :

a.

```
def racine(a,b):
    while abs(b-a) >= 0.001 :
        m = (a+b)/2
        if f(m) < 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return m
```

~~x~~

def racine(a,b):

$m = (a+b)/2$

while abs(b-a) <= 0.001 :

if f(m) < 0 :

a = m

else :

b = m

return m

Si m sera toujours égal à $\frac{a+b}{2}$ dans la boucle

~~x~~

def racine(a,b):

$m = (a+b)/2$

while abs(b-a) >= 0.001 :

if f(m) < 0 :

a = m

else :

b = m

return m

Non valide

d. ✓

def racine(a,b):

while abs(b-a) >= 0.001 :

$m = (a+b)/2$

if f(m) < 0 :

a = m

else :

b = m

return m