

Chapitre V :

« Qui parle sème, qui écoute récolte », Pythagore de Samos

Chapitre V Limites de fonctions - Asymptotes

I - Limite d'une fonction à l'infini

A - Limite infinie en $+\infty$ ou $-\infty$

Définition

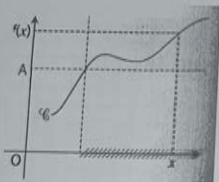
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme : $]a; +\infty[$, où a est un réel.

Dire que f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ signifie que les valeurs prises par f finissent par être supérieures à n'importe quel nombre réel A arbitrairement fixé (aussi grand soit-il) dès que x est suffisamment grand.

En des termes plus savants, tout intervalle ouvert de la forme : $]A; +\infty[$ (avec A nombre réel) contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment grand.

On notera : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ pour décrire ce phénomène.

Illustration graphique :



• Soit $x > x_0$, alors $f(x) > A$.

Propriété (limites de fonctions de référence)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\forall k \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} k = k; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

Remarque : à partir de maintenant, on fera figurer ces résultats dans les tableaux de variation des fonctions.

Exemple : dresser le tableau de variation complet de la fonction racine carrée.

x	0	$+\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	0	$+\infty$

Preuve : pour $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$: ultérieurement.

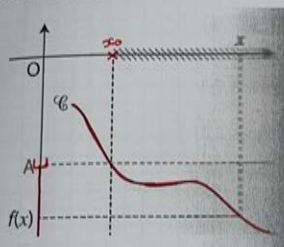
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Definition

De même, on dira que f admet pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ (on notera $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$), pour signifier que, les valeurs $f(x)$ deviennent inférieures à n'importe quel nombre arbitrairement fixé aussi petit soit-il, dès lors que x est suffisamment grand.

En des termes plus savants, tout intervalle ouvert de la forme $] -\infty ; A[$ (avec A nombre réel) contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment grand.

Illustration graphique :

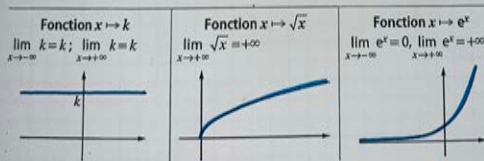


• Si $x > x_0$, alors $f(x) < A$

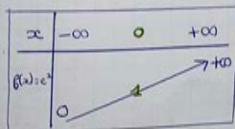
Propriété (limites de fonctions de référence)

♥♥♥ $\forall k \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} k = k \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$ ♥♥♥

Illustration graphique :



La limite en $-\infty$ de la fonction exponentielle est admise provisoirement et sera justifiée plus loin.



Fonction $x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

• Si n est impair :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$$



• Si n est pair :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$$



B - Limite finie en $+\infty$ ou en $-\infty$

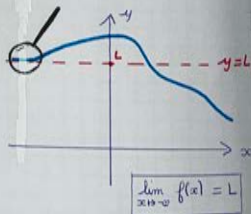
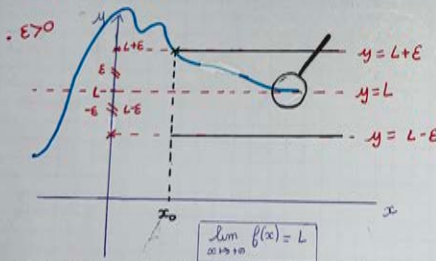
Définition : Dire qu'une fonction f a pour limite le nombre réel L en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment grand.

On note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ (et on dit encore que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers $+\infty$).

Dire qu'une fonction f a pour limite le nombre réel L en $-\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment petit.

On note : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ (et on dit encore que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers $-\infty$).

Illustration graphique :



Concrètement, pour x suffisamment grand, la portion de C_f correspondante à ces valeurs de x reste entièrement emprisonnée dans la bande formée par les droites horizontales délimitant l'intervalle ouvert contenant L .

Propriété (limites de fonctions de référence)

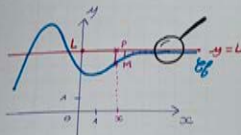
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = 0 \dots \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Remarque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = 0$ sera justifiée ultérieurement au paragraphe limite de fonctions composées.

Définition (à mémoriser par cœur)

Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ avec $L \in \mathbb{R}$, on dit que la droite (d) d'équation : $y = L$ est **ASYMPTOTE HORIZONTALE** à la courbe C_f représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

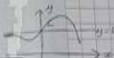
Illustration :



$$\begin{cases} M(x; f(x)) \\ P(x; L) \end{cases}$$

tendre à ne confondre
se confond totalement

Graphiquement, cela se traduit par le fait que C_f et la droite horizontale d'équation : $y = L$ se confondent quasiment pour les grandes valeurs de x : plus précisément, la longueur MP tend vers 0 dès lors que x tend vers $+\infty$:



De même, si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, la droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à C_f en $-\infty$.

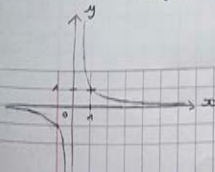
Remarque

En traçant la courbe représentative d'une fonction à l'aide d'une calculatrice, on peut conjecturer la présence d'asymptote horizontale.

Exemple 1 : Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{1}{x}$.

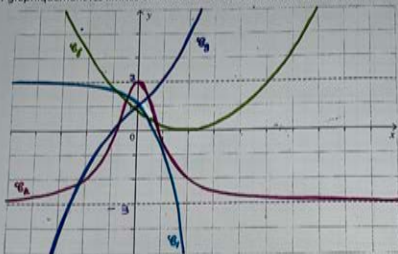
On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Qu'en déduit-on en termes d'asymptote ?

La droite d'équation $y = 0$, à savoir l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$



Exercice 1

1) Conjecturer graphiquement les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions représentées ci-dessous.



2) Certaines courbes représentatives semblent-elles admettre des asymptotes horizontales ? Si oui, donner leurs équations.

3) Dresser les tableaux de variation complets des fonctions f_i définies sur $\mathbb{R}$.

① • $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -3$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -3$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} i(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} i(x) = 2$

② • f_1 n'admet aucune ASH (asymptote horizontale)

• f_2 n'admet aucune ASH

• La droite d'équation : $y = -3$ est A.S.H à f_3 en $-\infty$ et en $+\infty$.

• La droite d'équation $y = 2$ est ASH à f_4 en $-\infty$.

③

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	-3	2	-3

Exercice 2

On considère une fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

1. Quelle est la limite de f en $+\infty$? en $-\infty$?

2. Interpréter graphiquement ces résultats.

3. Proposer une courbe pouvant représenter la fonction f .

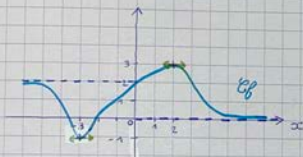
x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	2		-1		3	0

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

2) • $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ signifie que la droite d'équation $y = 0$ est A.S.H. à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ signifie que la droite d'équation $y = 2$ est A.S.H. à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$

3)



C - Limite infinie en un réel a

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Intéressons-nous aux valeurs prises par f lorsque x est proche de 0, sans jamais valoir 0.

x	-0,1	-0,01	-10^{-3}	0	10^{-3}	0,01	0,1
$f(x)$	100	10 000	1 000 000	$\frac{1}{0}$	1 000 000	10 000	100

Constat :

On notera : les valeurs prises par f tendent vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0.

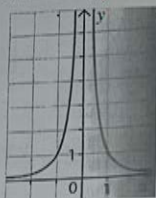
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

Définition

Soit a un nombre réel. Dire qu'une fonction f admet pour limite $+\infty$ en a , signifie que tout intervalle de la forme $]A ; +\infty[$ (avec A nombre réel) contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

On note : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

Illustration : Ici, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$



Limite à gauche d'un point - Limite à droite d'un point

Quand x est proche de 0, qu'en est-il de $\frac{1}{x}$?

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ (appelée limite à droite de la fonction inverse).

et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ (appelée limite à gauche de la fonction inverse).

Remarque : la notation $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ peut se noter : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. De même, la notation $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ sera notée : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

♥ Formulaire : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = +\infty$; Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = -\infty$ si n est impair.

Définition

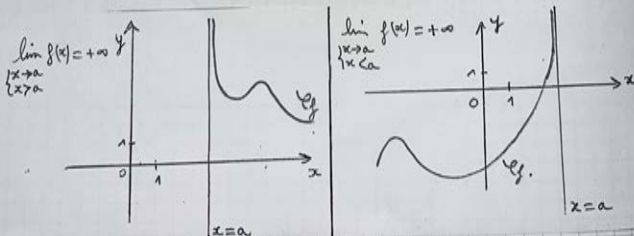
Soit a un réel.

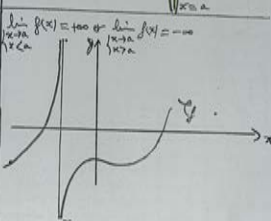
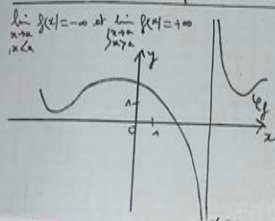
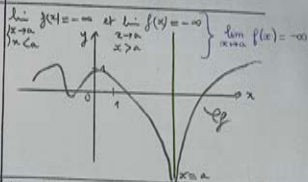
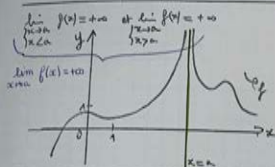
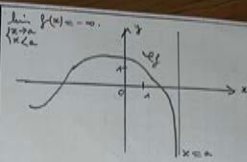
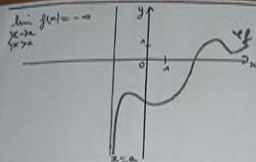
droite verticale



Lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $(-\infty)$, on dit que la droite verticale d'équation : $x = a$ est asymptote verticale à C_f .

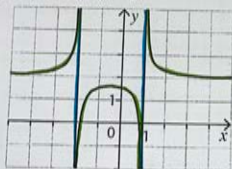
Illustration graphique : 8 cas de figures sont possibles : les voici :





Exercice 2

On a représenté ci-dessous une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$.



1. Conjecturer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de la fonction f .
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f .

1) Il y a 6 limites à conjecturer :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$
$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

→ Donc la droite d'équation $y = 2$ est A.S.H à $-\infty$ et $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$
--	---

→ Donc la droite d'équation : $x = -2$ est A.S.V à $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$
---	---

→ Donc la droite d'équation : $x = 1$ est A.S.V à $+\infty$

③

x	$-\infty$	-2	-0.6	1	$+\infty$
$f(x)$		$+\infty$	-0.6	$+\infty$	

deux valeurs interdites par f

$x = 1$ et $x = -2$
 f non définie en ces valeurs.

Exercice 1

Le tableau de variation ci-dessous décrit les variations d'une fonction f .

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	1	$+\infty$	1

1. Utiliser les notations qui conviennent pour décrire les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Donner les équations des asymptotes éventuelles à la courbe représentative de la fonction f .

① $\mathcal{D}f :]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = -\infty$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = +\infty$

- ②
- $y = 1$ est A.S.H à $\mathcal{D}f$ en $+\infty$ et en $-\infty$
 - $x = 3$ est A.S.V à $\mathcal{D}f$.

III - Calcul de limites

A - Opérations sur les limites

Toutes les règles sur les limites vues au chapitre "suites" se généralisent sans difficulté aux fonctions.

Les tableaux suivants résument les différents cas de figures :

f et g sont deux fonctions définies sur le même ensemble de définition.
 a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et ℓ, ℓ' désignent des nombres réels.

A) Somme et produit de deux fonctions : règles admises

limite de somme	Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \dots$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \dots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	alors $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \dots$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	$-\infty$

limite de produit	Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \dots$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
	et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \dots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
	alors $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = \dots$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Dans les cas notés FI (Forme indéterminée), on ne peut pas conclure immédiatement et tout résultat est possible. Dans un tel cas, il faut lever l'indétermination en changeant l'écriture.

Donnons quelques exemples de formes indéterminées pour la somme et le produit :

P. I. pour la somme :

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x+5 ; g(x) = -x \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(x) + g(x) = 5 \\ \text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = 5 \end{array} \quad (*)$$

Exercice 5

Calculer les limites suivantes.

- 1) a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^3 - 9x^2 + 2)$ b. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{1}{x} + 2x + 3 \right)$ c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 7x + 1)$
- 2) a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (2-x)$ b. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(x-3 \right) \left(2 - \frac{1}{x} \right)$ c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - e^x)(2 + e^x)$

3) Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de : $f(x) = e^x + e^{-x}$.

$$(*) \quad \left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{x} ; g(x) = x^2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{et } f(x) \times g(x) = \frac{1}{x} \times x^2 = x \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array}$$

Exercice 5 :

1) a) Par limites de référence :

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty, \text{ donc } 7 > 0, \text{ donc par limite de produit } \lim_{x \rightarrow -\infty} 7x^3 = -\infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-9x^2) = -\infty \text{ (car } -9 < 0)$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2$$

$$\text{Donc par limite de somme : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$b) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{1}{x} + 2x + 3 \right)$$

Par limite de référence : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (2x + 3) = 3$

Donc par somme : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{1}{x} + 2x + 3 \right) = -\infty$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 7x + 1)$$

Par limite de référence : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7x + 1) = +\infty$

Donc par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 7x + 1) = +\infty$

$$2) a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(2-x)$$

Par limite de référence : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x) = -\infty$

Donc par produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(2-x) = -\infty$

$$b) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x-3)\left(2-\frac{1}{x}\right)$$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x-3) = -3$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ Donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(2-\frac{1}{x}\right) = -\infty$

Par limite de produit : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x-3)\left(2-\frac{1}{x}\right) = +\infty$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3-e^x)(2+e^x)$$

Par limite de référence : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Donc par somme : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3-e^x) = 3$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2+e^x) = 2$

Par produit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3-e^x)(2+e^x) = 6$

$$3) f(x) = e^x + e^{-x}$$

Par limite de référence : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Or $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$; donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

Donc par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + e^{-x} = +\infty$

Par limite de référence : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \rightarrow e^x > 0$

Or $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$; donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$

Donc par somme : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

- a) Expliquer pourquoi on est ici en présence d'une forme indéterminée pour la limite de f en $+\infty$.
 b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x + 2) = -\infty$

Donc on a une F.I. de type : " $+\infty - \infty$ "

b) $f(x) = x(x^2 - 3) + 2$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2$

Donc par produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x^2 - 3) = +\infty$

et par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x^2 - 3) + 2 = +\infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Pour $x \neq 0$, $f(x) = x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right)$

Donc par limite de référence : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$

Donc par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) = 1$

Donc par limite de produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Remarque : lorsqu'on est en présence d'une F.I., on ne peut pas conclure directement. Pour lever l'indétermination, on utilisera les transformations d'écriture vues au chapitre sur les suites (en particulier, la technique de factorisation, puis de simplification, ces deux étapes lèvent souvent l'indétermination !).

B Quotient de deux fonctions : règles admises

• Cas où
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \dots$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \dots$	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

• Cas où
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \dots$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \dots$	0 en restant positif	0 en restant positif	0 en restant négatif	0 en restant négatif	0
alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Donnons quelques exemples de formes indéterminées pour le quotient :

$$\begin{aligned} \rightarrow f(x) &= x & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \\ \rightarrow g(x) &= x^2 & \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= +\infty \\ \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} & \text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} &= 0 \end{aligned}$$

Exercice 7

f est définie sur $]2; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{5x+1}{x-2}$

- Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
- Déterminer la limite de f en 2. Interpréter graphiquement ce résultat.
- Déterminer la limite de f en 4.

$$x > 2 \text{ et } f(x) = \frac{5x+1}{x-2}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x+1) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$$

Donc F.I. pour le quotient.

$$\text{On } f(x) = \frac{5x+1}{x-2} = \frac{x(5+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{2}{x})} = 5 + \frac{1}{x-2}$$

• Par limite de référence : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Donc par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5 + \frac{1}{x-2}) = 5$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{2}{x}) = 1$

Donc par quotient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$

b) On cherche sur : $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$:

$$\text{On } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (5x+1) = 11 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x-2) = 0^+$$

Donc par quotient : $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$

$$c) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x+1}{x-2} = \frac{21}{2}$$

Exercice 8

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{6x^2+3x-5}{2x^2+7}$.

Démontrer que la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à C en $+\infty$.

$$x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{6x^2+3x-5}{2x^2+7}$$

$$\hookrightarrow \text{BUT : Mg } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

$\Rightarrow$ Il s'agit d'un F.I. du type $\frac{+\infty}{+\infty}$

$$\text{Pour } x \neq 0 \quad f(x) = \frac{x^2(6 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2})}{x^2(2 + \frac{7}{x^2})} = \frac{6 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{7}{x^2}}$$

Par limite de séparation : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Donc par produit et somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (6 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}) = \boxed{6}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \frac{7}{x^2}) = \boxed{2}$$

Donc par quotient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \boxed{3}$

• Donc la droite d'équation $y = 3$ est A.S.H. à C en $+\infty$.

B - Composition et limites

Une composée de deux fonctions est un enchaînement de ces deux fonctions l'une après l'autre.

Par exemple, soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

L'expression $f(x)$ s'obtient en appliquant à x la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x^2+1$ suivie de la fonction racine carrée notée v définie par $v(X) = \sqrt{X}$.

Schéma :

$$x \xrightarrow{u} x^2+1 \xrightarrow{v} \sqrt{x^2+1} \quad f(x) = v(u(x)) = v(x^2+1) = \sqrt{x^2+1}$$

$\searrow \quad \quad \quad \nearrow$
 $x \quad \quad \quad \sqrt{x}$

On a donc : $f(x) = v(u(x))$, on dit que f est la composée de u suivie de v .

Théorème (limite de composée de fonctions)

Soit f et g des fonctions que l'on peut faire s'enchaîner.

a, b et c désignent soit des nombres réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et si $\lim_{X \rightarrow b} g(X) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$.

Ce théorème assez intuitif est admis, une preuve rigoureuse sera donnée l'année prochaine.

Exercice 9

Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+e^x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-x+1}$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} e^{\frac{2x}{x-3}}$.

• $\sqrt{x+e^x} = \sqrt{f(x)}$ avec $f(x) = x+e^x$

Par limite de référence : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Donc par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+e^x) = \boxed{+\infty}$

Or par limite de référence : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = \boxed{+\infty}$

Donc par limite de fonction composée : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+e^x} = +\infty}$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-x+1}$

Pour $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2-x+1)$: F.I à priori

$$g(x) = \sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}$$

• Par limite de ref : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

Par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) = 1$

Donc par produit : $\underbrace{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}_{\times} = +\infty$ Or $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$

Par limite de fonction composée : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-x+1} = +\infty}$

• $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} e^{\frac{2x}{x-3}}$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} 2x = \boxed{6}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} (x-3) = \boxed{0^-}$

Donc par quotient : $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{2x}{x-3} = -\infty$

Or $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = 0$; donc par limite de fonction composée : $\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} e^{\frac{2x}{x-3}} = 0}$

Prouvons maintenant grâce au théorème de composition des limites que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Autre règle : Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ / donc par composition : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = +\infty$

Donc par quotient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

Exercice 10

1) f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x+1}$.
Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2) h est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Déterminer la limite de h en : $+\infty$; $-\infty$; 0 (on distinguera les limites à gauche et à droite en 0).

3) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-x+4}{2x+1}}$.

1) $f(x) = e^{2x+1}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Donc par composition : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x+1} = +\infty$

2) Pour $x \neq 0$, $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = e^0 = 1$$



Donc par composition : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \text{exactement même raisonnement, conduit à} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Donc par composition : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} e^{\frac{1}{x}} = 0$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Donc par composition : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

3) En $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+4}{2x+1}$: F.I. du type $\frac{-\infty}{+\infty}$

$$\text{Or} \quad \frac{-x+4}{2x+1} = \frac{x(-1+\frac{4}{x})}{x(2+\frac{1}{x})} = \frac{-1+\frac{4}{x}}{2+\frac{1}{x}}$$

$$\text{Or} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1+\frac{4}{x}) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2+\frac{1}{x}) = 2$$

$$\text{Donc par quotient :} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1+\frac{4}{x}}{2+\frac{1}{x}} = -\frac{1}{2}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+4}{2x+1} = -\frac{1}{2}$

Or $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} e^x = e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e}$

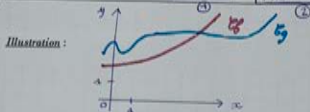
C - Théorèmes de comparaison et limites

Théorème de comparaison

Soit f et g deux fonctions.

Si pour x suffisamment grand $f(x) \geq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Si pour x suffisamment grand $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$



Rappel : $\forall x$ au dessus de x_2 sur I
 La graphie : $\forall x \in I, f(x) \geq g(x)$

Remarque : ce théorème s'étend sans problème lorsque x tend vers $-\infty$ en changeant le premier point de la condition en : pour x suffisamment petit, ou encore même lorsque x tend vers un réel a .

Exemple 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ où $f(x) = x^2 + \cos(x)$.

2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x - 3 \sin(x))$ 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x (3 + 2 \sin(x)))$

Question : Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, peut-on en déduire que f est croissante à partir d'un certain stade ?

1) $f(x) = x^2 + \cos(x)$

! $\cos$ n'a pas de limite en $+\infty$ (et en $-\infty$)

$\forall x \in \mathbb{R}; -1 \leq \cos(x) \leq 1$

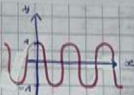
Donc : $x^2 - 1 \leq x^2 + \cos(x) \leq x^2 + 1$

Donc : $x^2 - 1 \leq f(x)$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) = +\infty$

Donc par th. de comparaison des limites inférieures

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



2) $g(x) = 5x - 3 \sin(x)$

! $\sin$ n'a pas de limite en $-\infty$

$\forall x \in \mathbb{R};$

$-1 \leq \sin(x) \leq 1$

$3 \geq -3 \sin(x) \geq -3$

Donc $5x + 3 \geq 5x - 3 \sin(x) \geq 5x - 3$

On $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x+3) = +\infty$ et $g(x) \leq 5x+3$

Donc par th de comparaison des limites infinies :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

3) $h(x) = e^x (3 + 2 \sin(x))$

On sait qu'il y a pas de limites en $+\infty$

$\forall x \in \mathbb{R} ; -1 \leq \sin(x) \leq 1$

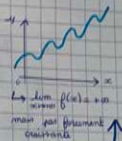
$$\begin{aligned} -2 &\leq 2 \sin(x) \leq 2 \\ 1 &\leq 3 + 2 \sin(x) \leq 5 \end{aligned}$$

Donc $e^x \leq \underbrace{e^x (3 + 2 \sin(x))}_{h(x)} \leq 5e^x$

On $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Donc par th de comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$



Un calcul de limite ne permet JAMAIS de prévoir le sens de variation d'une fonction !

Théorème des gendarmes

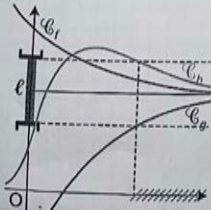
Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I de la forme : $]a ; +\infty[$ ou $]-\infty ; b]$. (a et b désignent des réels, ou bien $+\infty$ pour b , et $-\infty$ pour a), et enfin, soit ℓ un réel.

Si pour x suffisamment grand, on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$
 Alors, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$

De même, on a l'énoncé analogue suivant :

Si pour x suffisamment petit, on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \ell$
 Alors, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$

Illustration :



Remarque : Retenez que pour pouvoir appliquer ce théorème, il faut que 3 conditions soient remplies :

- Avoir l'encadrement $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ au voisinage de $+\infty$.
- Que les fonctions g et h admettent des limites finies en $+\infty$.
- Que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$

Mêmes conditions au voisinage de $-\infty$ et en un point.

Exercice 11

1) f est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x \geq 1$: $1 - \frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x}$

Déterminer la limite de f en $+\infty$

2) Déterminer, en justifiant, les limites suivantes, et interpréter graphiquement les résultats obtenus :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ où $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ où $g(x) = (e^{-x} \cos(x) + 2)$

$$1) \text{ Pour } x \geq 1, \quad 1 - \frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x}$$

Par limites de ref : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$

Donc par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{x^2}) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x}) = 1$

Donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

2) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ avec $x \neq 0$

⚠ $\sin$ n'admet pas de limites en $+\infty$

Or $\forall x \in \mathbb{R} ; -1 \leq \sin(x) \leq 1$

En particulier, pour $x < 0$:

$$\frac{-1}{x} \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \frac{1}{x}$$

d'où : $\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{-1}{x}$

On $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$

Donc d'après le th. des gendarmes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$b) g(x) = e^{-x} \cos(x) + 2$$

⚠️ car m'a pas de limites en $+\infty$

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$-1 \times e^{-x} \leq e^{-x} \cos(x) \leq 1 \times e^{-x}$$

$$-e^{-x} + 2 \leq e^{-x} \cos(x) + 2 \leq e^{-x} + 2$$

$$\bullet \text{ Or } e^{-x} = \frac{1}{e^x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Donc par quotient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

$$\bullet \text{ Ainsi } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + 2) = \boxed{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + 2) = \boxed{2}$$

Donc d'après le th. des gendarmes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$

D. Croissances comparées et nouvelles limites

A l'aide d'étude de fonctions, démontrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$.

a) Étudier les variations de f .

b) En déduire que pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$.

c) En déduire la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$ (justification du résultat admis p.1).

$$1) a) f(x) = e^x - x - 1 \Rightarrow f'(x) = e^x - 1$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

Donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$- \quad \quad +$	
$f(x)$			

$$f(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

b) Grâce à q.a) f admet pour min. 0 sur $\mathbb{R}$

donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$

$$e^x - x - 1 \geq 0$$

$$\boxed{e^x \geq x + 1}$$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$ et $\forall x \in \mathbb{R}; e^x \geq x+1$

Donc par th de comparaison des limites infinies.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

♥♥♥ Propriété des croissances comparées ♥♥♥ (# BAC ça tombe très fréquemment !!)

1) ♥♥♥ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ♥♥♥ (équivalent à $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$)

2) ♥♥♥ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = 0$ ♥♥♥

Preuve du 1) :

2. g est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$.

a) Déterminer la fonction dérivée de g. Dédire de la question 1. que g est croissante sur $[0; +\infty[$.

b) En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x}$.

Preuve du 2) : On se ramène au cas 1) :

Preuve du 1) : Pour $x \geq 0$ $g(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$

2) a) $g'(x) = e^x - x$

Grâce à q.1) de la preuve de $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$; on a :

$\forall x \in \mathbb{R}; e^x \geq x+1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}; \underbrace{e^x - x}_{g'(x)} \geq 1$

$g'(x) \geq 1 > 0$

Donc g croît sur $\mathbb{R}$; donc a fortiori g croît sur $[0; +\infty[$

x	0	$+\infty$
g(x)	1	$\nearrow$

$\forall x \in [0; +\infty[; \underbrace{g(x)}_{\geq 1} \geq 1$ (cf tableau)

$e^x - \frac{1}{2}x^2 \geq 1$

$e^x \geq \frac{1}{2}x^2 + 1$

En particulier, pour $x > 0$:

$\frac{e^x}{x} \geq \frac{\frac{1}{2}x^2 + 1}{x}$

$\frac{e^x}{x} \geq \frac{\frac{1}{2}x^2}{x} + \frac{1}{x}$

$\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Donc par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} \right) = +\infty$

Donc par th de comparaison : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Preuve de 2) : BUT : Mq $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = 0$

Astuce Belge : $x e^x = -(-x) e^{-(-x)}$

$x e^x = -(-x) \times \frac{1}{e^{-x}}$

$x e^x = -\frac{(-x)}{e^{-x}}$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = +\infty$

Par croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Donc par quotient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

Par limite de composé : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{e^{-x}} = 0$; donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\left(\frac{-x}{e^{-x}} \right) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$



Propriété (croissances comparées)

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^x = \dots$

Remarque : ces deux résultats contiennent ceux de la propriété précédente ($n = 1$ dans cette dernière !).

Par exemple, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{100}} = +\infty$

$$3) g(x) = e^x - x^2 + 2x + 3$$

Par $x > 0$: On factorise par x^2 :

$$g(x) = x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - 1 + \frac{2x}{x^2} + \frac{3}{x^2} \right)$$

$$g(x) = x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - 1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)$$

Par C.C. : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ / $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2} - 1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right) = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ Donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Exercices de synthèse de type bac

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x - 1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Calculer la limite de f en 0.

2. a. Montrer que pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $f(x) = \frac{2 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

b. Calculer la limite de f en $+\infty$.

3. Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet deux asymptotes.

En donner une équation.

4. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0; +\infty[$.

b. En déduire le sens de variation de f .

5) Etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de son asymptote en $+\infty$.

6) Donner le portrait-robot de $\mathcal{C}_f$.

$$x \in]0; +\infty[; f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x - 1}$$

① $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$

→ On $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2e^x + 1) = 3$

et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (e^x - 1) = 0^+$

$$\left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ e^x > e^0 \\ e^x > 1 \end{array} \right.$$

Donc par quotient :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$$

$$1) a) f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x - 1}$$

$$f(x) = \frac{e^x (2 + \frac{1}{e^x})}{e^x (1 - \frac{1}{e^x})} = \frac{2 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

$$2) b) f(x) = \frac{2 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

$$\text{On } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + e^{-x}) = 2 \text{ et}$$

$$\text{On } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = 0$$

$$\text{Donc par comparaison : } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

$$\text{Donc par somme : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + e^{-x}) = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) = 1$$

$$\text{Donc par quotient : } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2}$$

$$3) \text{ D'après 1) : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$$

Donc la droite d'équation $x=0$ (= axe des ordonnées)
est **ASYMPTOTE VERTICALE** à $+\infty$

$$\text{D'après 2) : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

→ Donc la droite d'équation $y=2$ est A.S.H à $+\infty$.

$$4) a) f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ avec}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x - 1) - (2e^x + 1)e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{\cancel{2e^{2x}} - 2e^x - \cancel{2e^{2x}} - e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-3e^x}{(e^x - 1)^2}}$$

$$\left(\frac{+}{+} = + \right)$$

$$4) b) \left. \begin{array}{l} e^x > 0 ; \text{ donc } -3e^x < 0 \\ \text{et } (e^x - 1)^2 > 0 \end{array} \right\} \text{ Donc } \forall x \in]0; +\infty[; \frac{-3e^x}{(e^x - 1)^2} < 0$$

$$\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) < 0$$

Donc f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

5) Soit $g(x) = 2$

→ RAPPEL : $\mathcal{C}_f$ est AU-DESSUS de $\mathcal{C}_g$ sur I , équivaut à dire que : $f(x) > g(x)$

On a : $f(x) - g(x) > 0$

On cherche le signe de $f(x) - g(x)$:

$$f(x) - g(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x - 1} \cdot 2 = \frac{2e^x + 1 - 2(e^x - 1)}{e^x - 1}$$

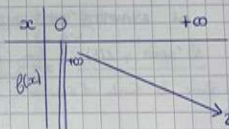
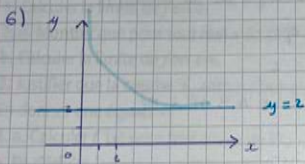
$$f(x) - g(x) = \frac{3}{e^x - 1}$$

Or $3 > 0$ et $x > 0$, donc par croissance d'exp :

on a : $e^x > e^0$ donc $e^x - 1 > 0$

Donc $\frac{3}{e^x - 1} > 0$ / donc $f(x) - g(x) > 0$

Donc $\mathcal{C}_f$ est situé AU-DESSUS de $\mathcal{C}_g$ sur $]0; +\infty[$



Exercice II

La taille d'une population de rongeurs exprimée en centaines d'individus, est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{3e^{0,5t}}{e^{0,5t} + 2}, \text{ où } t \text{ représente}$$

le temps écoulé depuis l'année 2015, exprimé en années.



1. a. Calculer $f(0)$ et interpréter ce résultat.

b. Montrer que : $f(t) = 3 - \frac{6}{e^{0,5t} + 2}$.

c. En déduire la limite de f quand t tend vers $+\infty$.

2. a. Montrer que pour tout réel t de $[0; +\infty[$,

$$f'(t) = \frac{3e^{0,5t}}{(e^{0,5t} + 2)^2}.$$

b. Établir le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.

1) a) $f(0) = \frac{3e^{0,5 \times 0}}{e^{0,5 \times 0} + 2} = \frac{3e^0}{e^0 + 2} = \frac{3 \times 1}{1 + 2} = \frac{3}{3} = 1$

En 2015, il y a 100 rongeurs.

$$\begin{aligned}
 d) \quad f(t) &= \frac{3e^{0,5t}}{e^{0,5t} + 2} = \frac{3e^{0,5t} + 6 - 6}{e^{0,5t} + 2} \\
 &= \frac{3e^{0,5t} + 6}{e^{0,5t} + 2} - \frac{6}{e^{0,5t} + 2} \quad \left(\text{car } \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \right) \\
 &= \frac{3(e^{0,5t} + 2)}{e^{0,5t} + 2} - \frac{6}{e^{0,5t} + 2}
 \end{aligned}$$

$$f(t) = 3 - \frac{6}{e^{0,5t} + 2}$$

Méthode 2 (Buchanon) :

$$\begin{aligned}
 3 - \frac{6}{e^{0,5t} + 2} &= \frac{3}{1} - \frac{6}{e^{0,5t} + 2} = \frac{3(e^{0,5t} + 2)}{e^{0,5t} + 2} - \frac{6}{e^{0,5t} + 2} = 3 - \frac{6}{e^{0,5t} + 2} = \frac{3e^{0,5t} + 6 - 6}{e^{0,5t} + 2} \\
 &= \frac{3e^{0,5t}}{e^{0,5t} + 2} = f(t)
 \end{aligned}$$

1) c) 2' après q.b) : $f(t) = 3 - \frac{6}{e^{0,5t}}$

Or $\lim_{t \rightarrow +\infty} 0,5t = +\infty$ et $\lim_{T \rightarrow +\infty} e^T = +\infty$

Donc par composée : $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{0,5t} = +\infty$

Par somme : $\lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{0,5t} + 2) = +\infty$

Par quotient : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{6}{e^{0,5t} + 2} = 0$

Par somme : $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 3$

• et très long terme, la population de rongeurs tend à se stabiliser à 300 individus.

2) a) $f(t) = \frac{3e^{0,5t}}{e^{0,5t} + 2} = \frac{u(t)}{v(t)}$ où $\begin{cases} u(t) = 3e^{0,5t} \\ u'(t) = 3 \times 0,5 e^{0,5t} = 1,5e^{0,5t} \end{cases}$ $\begin{cases} v(t) = e^{0,5t} + 2 \\ v'(t) = 0,5e^{0,5t} \end{cases}$

Donc $f'(t) = \frac{u'(t)v(t) - u(t)v'(t)}{v^2(t)}$

$$f'(t) = \frac{1,5e^{0,5t} \times (e^{0,5t} + 2) - 3e^{0,5t} \times 0,5e^{0,5t}}{(e^{0,5t} + 2)^2}$$

$$\boxed{\frac{f''(t)}{f(t)}} = \frac{-1,5e^t + 3e^{0,5t} - 1,5e^t}{(e^{0,5t} + 2)^2} = \boxed{\frac{3e^{0,5t}}{(e^{0,5t} + 2)^2}}$$

$$2) b) \forall t \in [0, +\infty[, e^{0,5t} > 0 , 3 > 0 , (e^{0,5t} + 2) > 0$$

→ Donc $f'(t) > 0$ (R.D.S.P.A)

Donc f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	1	$\rightarrow 3$

3. Recopier et compléter le programme ci-dessous afin que la fonction rongeure retourne l'année à partir de laquelle il y aura plus de 250 rongeurs.

```
from math import *
def rongeure():
    t=0
    p=1
    while p <= 2.5:
        t=t+1
        p=3*exp(0.5*t)/(exp(0.5*t)+2)
    return (2015+t)
```

Exercice III

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{ax+b}$, où a et b sont deux constantes réelles.

Les points $B(100; 100)$ et $C(50; \frac{50}{\sqrt{e}})$ appartiennent à la courbe de f .

1. Expliquer pourquoi le couple $(a; b)$ est solution du

$$\text{système } \begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -0,5 \end{cases}$$

2. Résoudre le système et en déduire que, pour tout réel x , $f(x) = xe^{0,01x-1}$.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. Montrer que pour tout réel x , on a :

$$f(x) = \frac{100}{e} \times 0,01xe^{0,01x}$$

5. En déduire la limite de f en $-\infty$.

6. Dresser le tableau de variation de f .

Interpréter graphiquement le résultat de la question 5).

$$1) x \in \mathbb{R} ; f(x) = xe^{ax+b}$$

$$B(100, 100) \in \mathcal{C}_f \text{ donc } \underbrace{f(100)}_{100e^{100a+b}} = 100$$

$$= 100$$

Donc $e^{100a+b} = \frac{100}{100} = \boxed{1}$

$e^{100a+b} = e^0$

Donc $\boxed{100a+b=0}$

• $C\left(50; \frac{50}{\sqrt{e}}\right) \in \text{tp}$ donc $\underbrace{f(50)} = \frac{50}{\sqrt{e}}$

$50e^{50a+b} = \frac{50}{\sqrt{e}}$
 $\div 50 \quad \downarrow \quad \div 50$
 $e^{50a+b} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$e^{50a+b} = \frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}} = e^{-0,5}$

Donc on a : $\boxed{50a+b = -0,5}$

• Donc on a : $\begin{cases} 100a+b=0 \\ 50a+b=-0,5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 100a+b=0 \\ 50a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-100a \\ 50a-100a=-0,5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-100a \\ -50a=-0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{-0,5}{-50}=0,01 \\ b=-100 \times 0,01 = -1 \end{cases}$

$\mathcal{C} = \{(0,01; -1)\}$

Donc $\boxed{f(x) = xe^{ax+b} = xe^{0,01x-1}}$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (0,01x-1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Donc par composition : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{0,01x-1} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$; donc par produit : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$

$$4) f(x) = x e^{0,01x+1} \quad \left(\begin{array}{l} e^{a+b} = \frac{e^a}{e^{-b}} \\ e^{-1} = \frac{1}{e} \end{array} \right)$$

$$f(x) = x \times \frac{e^{0,01x}}{e^1}$$

$$f(x) = \frac{x \times e^{0,01x}}{e} = \frac{100 \times 0,01 x e^{0,01x}}{e}$$

car $100 \times 0,01 = 1$

$$f(x) = \frac{100}{e} \times 0,01 x e^{0,01x}$$

$$5) f(x) = \frac{100}{e} \times 0,01 x e^{0,01x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 0,01x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \text{par croissances comparées}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} 0,01x e^{0,01x} = 0 \quad \text{par composition}$$

$$\text{Donc par produit : } \left(\frac{100}{e} = \text{constante} \right) : \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0}$$

Donc la droite d'équation : $y = 0$ est A.S.H à $-\infty$

$$6) f(x) = x e^{0,01x-1} = u(x)v(x) \quad \text{où} \quad \begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v(x) = e^{0,01x-1} \\ v'(x) = 0,01 e^{0,01x-1} \end{cases}$$

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$f'(x) = 1 \times e^{0,01x-1} + x(0,01 e^{0,01x-1})$$

$$f'(x) = e^{0,01x-1} \times (1 + 0,01x)$$

$$\boxed{f'(x) = (0,01x + 1) e^{0,01x-1}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; e^{0,01x-1} > 0 \quad \text{donc} \quad f'(x) \text{ a le m\^eme signe que } 0,01x + 1$$

$$\text{donc : } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 0,01x + 1 \geq 0$$

$$\boxed{f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-1}{0,01} \Leftrightarrow x \geq -100}$$

Donc :

