

Chapitre IV :

« L'essence des mathématiques c'est la liberté. » Georg Cantor

Chapitre IV

Probabilités : épreuves indépendantes et loi binomiale

1-Rappels de première

A-Variables aléatoires et espérance

nb. fois de valeurs

Variable aléatoire discrète

Définir une variable aléatoire discrète X pour une expérience aléatoire d'univers Ω , c'est associer à chaque issue de Ω un nombre réel.

La loi de probabilité de X associe à chaque valeur prise par X une probabilité :

Valeur prise x_i	x_1	...	x_n
Probabilité $P(X = x_i)$	p_1	...	p_n

$$[p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1]$$

L'espérance mathématique (on dit simplement *espérance*) d'une variable aléatoire X correspond à la *valeur moyenne* prise par X si on répète l'expérience aléatoire associée à X un grand nombre de fois. On note $E(X)$ l'espérance de X .

Avec la loi de probabilité donnée par le tableau précédent, on a :

$$E(X) = \underbrace{\dots x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_m \times p_m \dots}_{p_1 + p_2 + \dots + p_m} = \sum_{i=1}^m x_i \times p_i$$

Dans le cas d'un jeu d'argent, l'espérance correspond au *gain moyen*.

Un jeu est qualifié d'*équitable* si l'espérance de la variable aléatoire égale au gain du joueur est

$$E(X) = 0$$

valeur prise par X

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$$

Exercice 1

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée ci-contre.

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	p	$3p$

a. Déterminer la valeur de p .

b. Calculer la probabilité des événements $\{X < 2\}$, $\{X \geq 3\}$ et $\{2 \leq X \leq 4\}$.

c. Déterminer l'espérance de X .

$$a) 0,2 + 0,3 + p + 3p = 1$$

$$5p + 4p = 1$$

$$4p = 1 - 0,5 = 0,5$$

$$p = \frac{0,5}{4} = 0,125$$

$$b) P(X \leq 2)$$

proba. que les valeurs prises par X soient inférieures ou égales à 2.

$$P(X \leq 2) = 0,2 + 0,3 = 0,5$$

$$c) E(X) = 1 \times 0,2 + 2 \times 0,3 + 3 \times 0,125 + 4 \times 0,375$$

$$E(X) = 2,1675$$

$$P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4)$$

$$= 0,125 + 3 \times 0,125 = 0,5$$

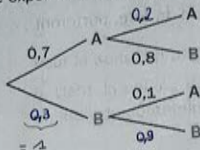
$$P(2 \leq X \leq 4) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$

$$= 0,3 + 0,125 + 3 \times 0,125$$

$$= 0,8$$

Exercice 2

a. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous, qui représente une expérience aléatoire.



b) $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

La loi de probabilité de X :

$(X = x_i)$	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,27	0,59	0,14

$$P(X=0) = 0,3 \times 0,9 = 0,27$$

$$P(X=2) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$$

$$P(X=1) = 1 - (0,27 + 0,14) = 1 - 0,41 = 0,59$$

b. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où l'événement A se réalise.

Déterminer la loi de probabilité de X .

$$P(X=1) = 0,7 \times 0,8 + 0,3 \times 0,1 = 0,56 + 0,03 = 0,59$$

$$E(X) = 0 \times 0,27 + 1 \times 0,59 + 2 \times 0,14 = 0,87$$

→ En moyenne on obtient 0,87 fois l'événement A lors de cette expérience aléatoire.

B - Propriétés usuelles en probabilités

La probabilité d'un événement est un nombre réel compris entre 0... et 1...

$P(A) = 0$: événement impossible

$P(A) = 1$: événement certain

Lorsque chaque issue d'une expérience aléatoire a même chance de réalisation, on parle de situation d'équiprobabilité.

Dans ce cas, si A désigne un événement de l'univers des possibles Ω , on a :

$$P(A) = \frac{\text{nbr d'issues favorables à la réalisation de } A}{\text{nbr total d'issues}}$$

Pour tout événement A , $\bar{A}$ désigne l'événement contraire de A , et on a : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Pour tout événement A et B d'un même univers Ω , $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Dans le cas où A et B sont incompatibles, c'est-à-dire lorsque $A \cap B = \emptyset$ on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ car $A \cap B = \emptyset$ donc $P(A \cap B) = 0$

En général, $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

Exemple : On lance un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Soit A l'événement : obtenir un résultat pair, et B l'événement : obtenir un nombre premier. Déterminer A , B , $A \cap B$ puis la probabilité de chacun de ces événements.

A-t-on : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$?

A = "obtenir un résultat pair"

B = "obtenir un nombre premier"

$A = \{2; 4; 6\}$

$B = \{2; 3; 5\} \rightarrow P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$A \cap B$ = "obtenir un nombre pair et un nombre premier"

$A \cap B = \{2\}$

Donc $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$$\text{Or } \frac{1}{6} \neq \frac{1}{4}, \text{ donc } P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

1) Définition

Soit Ω l'univers des possibles d'une expérience aléatoire, et A et B deux événements de Ω tels que $P(A) \neq 0$.

La probabilité de l'événement B , sachant que A est réalisé, est notée $P_A(B)$, avec, par définition :

$$\heartsuit \heartsuit P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B|A)}{P(A)} \heartsuit \heartsuit$$

on va diviser par $P(A)$

Cette relation des probabilités conditionnelles, donne un moyen de calculer la probabilité de l'intersection de deux événements :

Si $P(A) \neq 0$, on a : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

Remarque : Dans les exercices, on détecte la présence de probabilités conditionnelles grâce aux termes suivants : **sachant que, parmi, si** ... ou tout simplement quand l'énoncé donne une information de conditionnement : par exemple : "...on choisit une personne malade. Quelle est la probabilité qu'elle soit vaccinée ? ..." Ici la personne choisie l'est **parmi** les personnes malades !

Exemple

Dans une population donnée, 65 % des personnes possèdent un téléphone portable de marque PHONE1 et 32 % des personnes possèdent un ordinateur de marque PROMAC.

De plus, 13 % des personnes de cette population déclarent posséder les deux. On rencontre au hasard une personne de cette population.

On considère les événements :

T : "La personne rencontrée possède un téléphone portable PHONE1."

O : "La personne rencontrée possède un ordinateur PROMAC."

0) Traduire en termes de probabilités les données chiffrées de l'énoncé.

a) Déterminer la probabilité de rencontrer une personne qui a un ordinateur PROMAC sachant que cette dernière possède un téléphone portable PHONE1. = proba conditionnelle

b) Déterminer la probabilité que la personne rencontrée possède un téléphone portable PHONE1 sachant qu'elle a un ordinateur PROMAC.

0) $P(T) = \frac{65}{100} = 0,65$; $P(O) = \frac{32}{100} = 0,32$; $P(T \cap O) = \frac{13}{100} = 0,13$

a) On cherche ici : $P_O(T)$

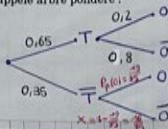
On $P_O(T) = \frac{P(T \cap O)}{P(O)} = \frac{0,13}{0,32} = \frac{13}{32} = \frac{1}{2,46} = 0,40625$

b) On cherche ici la valeur : $P_T(O)$

On $P_T(O) = \frac{P(T \cap O)}{P(T)} = \frac{0,13}{0,65} = \frac{13}{65} = 0,2$

2) Arbre pondéré et probabilités conditionnelles

Reprenons l'exemple précédent, et modélisons l'expérience aléatoire par un arbre de probabilités, encore appelé arbre pondéré :



$$P(O) = P(T \cap O) + P(\bar{T} \cap O)$$

= 0,13 + 0,22 = 0,35

Donc $P(\bar{T} \cap O) = 0,32 - 0,13 = 0,19$

ou $P_{\bar{T}}(O) = \frac{P(\bar{T} \cap O)}{P(\bar{T})} = \frac{0,19}{0,35} = \frac{19}{35}$

C - Probabilités conditionnelles

1) Définition

Soit Ω l'univers des possibles d'une expérience aléatoire, et A et B deux événements de Ω tels que $P(A) \neq 0$.

La probabilité de l'événement B , sachant que A est réalisé, est notée $P_A(B)$, avec, par définition :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

ou un dériver par P(A)

Cette relation des probabilités conditionnelles, donne un moyen de calculer la probabilité de l'intersection de deux événements :

Si $P(A) \neq 0$, on a : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

Remarque : Dans les exercices, on détecte la présence de probabilités conditionnelles grâce aux termes suivants : **sachant que, parmi, si** ou tout simplement quand l'énoncé donne une information de conditionnement : par exemple : "...on choisit une personne malade. Quelle est la probabilité qu'elle soit vaccinée ? ..." Ici la personne choisie l'est **parmi** les personnes malades !

Exemple

Dans une population donnée, 65 % des personnes possèdent un téléphone portable de marque **PHONE1** et 32 % des personnes possèdent un ordinateur de marque **PROMAC**.

De plus, 13 % des personnes de cette population déclarent posséder les deux. On rencontre au hasard une personne de cette population.

On considère les événements :

T : " La personne rencontrée possède un téléphone portable **PHONE1** "

O : " La personne rencontrée possède un ordinateur **PROMAC** "

0) Traduire en termes de probabilités les données chiffrées de l'énoncé.

a) Déterminer la probabilité de rencontrer une personne qui a un ordinateur **PROMAC** sachant que cette dernière possède un téléphone portable **PHONE1**. = proba conditionnelle

b) Déterminer la probabilité que la personne rencontrée possède un téléphone portable **PHONE1** sachant qu'elle a un ordinateur **PROMAC**.

0) $P(T) = \frac{65}{100} = 0,65$; $P(O) = \frac{32}{100} = 0,32$; $P(T \cap O) = \frac{13}{100} = 0,13$

a) On cherche ici : $P_O(T)$

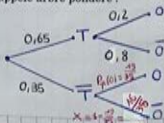
On $P_O(T) = \frac{P(T \cap O)}{P(O)} = \frac{0,13}{0,32} = \frac{13}{32} = \frac{1}{2,46} = 0,40625$

b) On cherche ici la valeur : $P_T(O)$

On $P_T(O) = \frac{P(T \cap O)}{P(T)} = \frac{0,13}{0,65} = \frac{13}{65} = 0,2$

2) Arbre pondéré et probabilités conditionnelles

Reprenons l'exemple précédent, et modélisons l'expérience aléatoire par un arbre de probabilités, encore appelé arbre pondéré :



$$P(O) = P(T \cap O) + P(\bar{T} \cap O)$$

= 0,13 + 0,19 = 0,32

Donc $P(\bar{T} \cap O) = 0,32 - 0,13 = 0,19$

ou $P_T(O) = \frac{P(T \cap O)}{P(T)} = \frac{0,13}{0,65} = \frac{13}{65} = 0,2$

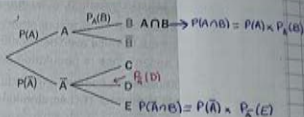
Remarques fondamentales concernant les arbres pondérés (à deux niveaux) :

- Un arbre pondéré se construit (à l'aide d'une règle) et se lit de gauche à droite.
- L'origine de l'arbre est appelée la racine de l'arbre.
- Les branches (= segments) partant de la racine sont appelées branches primaires de l'arbre.
- Ces dernières mènent à des nœuds où est écrit un événement avec une lettre majuscule.
- Les branches partant de nœuds sont appelées branches secondaires.
- Sur chaque branche secondaire, figurent des probabilités CONDITIONNELLES.

On peut représenter une **succession d'épreuves quelconques** par un **arbre pondéré**.

Dans l'arbre ci-contre, le **chemin A suivi de B** représente l'intersection des événements A et B. Cette intersection est notée **$A \cap B$** .

Les probabilités portées sur les branches du second niveau sont des **probabilités conditionnelles**.



3) Indépendance

Définition : Deux événements A et B d'un même univers Ω sont dits **indépendants** pour la probabilité p , lorsque la réalisation (ou non réalisation) de A n'influence pas la réalisation (ou non réalisation) de B.

Nous allons "mathématiser" cette définition :

Dire que A et B sont des événements **indépendants** signifie que :

$$\heartsuit \heartsuit \heartsuit \heartsuit . P(A \cap B) = P(A) \times P(B) . \heartsuit \heartsuit \heartsuit \heartsuit$$

Ω = espace indépendant

Propriété

Deux événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants équivalent à dire que :

$$P(B) = P_A(B) \quad \text{ou} \quad P(A) = P_{B'}(A)$$

La propriété fait donc le lien entre événements indépendants et probabilités conditionnelles.

Preuve : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow$ Si A et B indépendants, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
 de sorte que $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$

Réciproque : Si $P_A(B) = P(B)$ alors $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$; Donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Donc A et B sont indépendants

Attention : indépendants et incompatibles, ce n'est pas du tout la même chose !

Exercice 3

A et B sont deux événements qui vérifient :

$$P(A) = 0,4 ; P(B) = 0,3 \quad \text{et} \quad P(A \cap B) = 0,1.$$

a. Calculer les valeurs de $P_A(B)$ et $P_{B'}(A)$.

b. Calculer $P(A \cup B)$.

c. A et B sont-ils indépendants ? c) $\frac{M_A}{P_A(B)} = 0,25$ et $P(B) = 0,3$ / $P(A \cap B) = 0,1$ et $P(A) \times P(B) = 0,12$
 Donc $P_A(B) \neq P(B)$ donc A et B non indep. $0,25 \neq 0,3$ / $0,4 \neq 0,12$ donc $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

$$a) P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$P_{B'}(A) = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$$

$$b) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

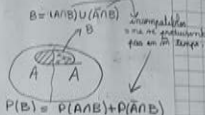
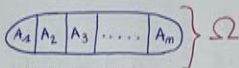
$$P(A \cup B) = 0,4 + 0,3 - 0,1 = 0,6$$

4) Formule des probabilités totales

Définition : Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ une famille d'événements **non impossibles** et **deux à deux incompatibles** d'un même univers Ω .

Lorsque la **réunion de $A_1, A_2, \dots, A_n$ est égale à Ω** , on dit que $A_1, A_2, \dots, A_n$ **forment une partition de l'univers Ω** .

Illustration :



Propriété (appelée formule des probabilités totales)

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ une partition de l'univers Ω .

Pour tout événement B de Ω , on a :

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \dots + p(A_n \cap B) = \sum_{k=1}^n p(A_k \cap B)$$

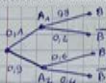
Remarque : Cela n'est que la traduction mathématique du dernier point concernant les arbres !

Dans les exercices, cette dernière sera le plus fréquemment utilisée avec $n=2$ ou $n=3$:

Si A et $\bar{A}$ sont des événements de probabilité non nulle, ils forment une partition de Ω , et donc, pour tout événement B on a :

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$$

C'est essentiellement sous cette forme que nous utiliserons la formule des probabilités totales.



0) après la f. d. p. totales :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)$$

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B)$$

$$P(B) = 0,1 \times 0,2 + 0,9 \times 0,6 = 0,62$$

Remarques clé concernant les arbres de probabilité :

- Loi des nœuds : la somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est toujours **1**.
- La probabilité associée à un chemin est égale au **produit**... des probabilités figurant sur les branches de ce chemin.

Par exemple, $p(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$; $p(A \cap B \cap C) = P(A) \times P_A(B) \times P_{AB}(C)$

- Enfin, la probabilité d'un événement est égale à **la somme**... des probabilités des chemins qui aboutissent à cet événement : c'est la formule des probabilités totales !

Exercice 4

Dans un lycée, 54 % des élèves sont des filles, parmi elles, 72 % sont externes.

De plus, parmi les garçons, 76 % sont externes. On choisit au hasard un élève du lycée.

On note : F l'événement : "l'élève choisi est une fille".

E : "l'élève choisi est externe"

- Traduire ces données à l'aide de probabilités.
- Faire un arbre de probabilités.

c) Calculer la probabilité d'avoir choisi une fille qui est externe.

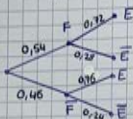
d) Calculer la probabilité d'interroger un élève externe.

e) Calculer la probabilité d'interroger une fille sachant qu'on a interrogé un élève non externe.

$$a) \bullet P(F) = \frac{54}{100} = 0,54 \quad \bullet P_F(E) = \frac{76}{100} = 0,76$$

$$\bullet P_F(\bar{E}) = \frac{24}{100} = 0,24$$

b)



c) On cherche la probabilité de : $P(F \cap E)$

$$\text{Or } P(F \cap E) = P(F) \times P_F(E)$$

$$\boxed{P(F \cap E)} = 0,54 \times 0,76$$
$$\boxed{= 0,3838}$$

d) On cherche la valeur de $P(E)$

• D'après la formule des probabilités totales : $P(E) = P(F \cap E) + P(\bar{F} \cap E)$

$$P(E) = 0,3838 + 0,46 \times 0,72$$

$$\boxed{P(E) = 0,7384}$$

e) On cherche ici la valeur de $P_{\bar{E}}(F)$

$$\text{On f.d.p. conditionnelles : } P_{\bar{E}}(F) = \frac{P(\bar{E} \cap F)}{P(\bar{E})} = \frac{P(F) \times P_F(\bar{E})}{1 - P(E)}$$

$$\boxed{P_{\bar{E}}(F)} = \frac{0,54 \times 0,24}{1 - 0,7384} \approx \boxed{0,578} \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)}$$

Exercice 5 (issu de bac)

Dans cet exercice, les réponses seront arrondies à 10^{-4} près (≈ 4 chiffres significatifs après ,)

Durant la saison hivernale, la circulation d'un virus a entraîné la contamination de 2% de la population d'un pays. Dans ce pays, 90% de la population a été vaccinée contre ce virus.

On constate que 62% des personnes contaminées avaient été vaccinées.

On interroge au hasard une personne, et on note les événements suivants :

C : « la personne a été contaminée »

V : « la personne a été vaccinée ».

Les événements contraires des événements C et V sont notés respectivement $\bar{C}$ et $\bar{V}$.

1. À partir de l'énoncé, donner, sans calcul, les probabilités $P(C)$, $P(V)$ et la probabilité conditionnelle $P_C(V)$.

2. a. Calculer $P(C \cap V)$.

b. En déduire $P(\bar{C} \cap V)$.

3. Recopier l'arbre des probabilités ci-dessous et le compléter.

$$1) P(C) = \frac{2}{100} = 0,02$$

$$P_C(V) = \frac{62}{100} = 0,62$$

$$P(V) = \frac{90}{100} = 0,90$$

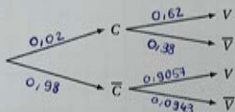
$$2) a) \boxed{P(C \cap V)} = P(C) \times P_C(V) = 0,02 \times 0,62$$
$$\boxed{= 0,00124}$$

b) D'après la formule des probabilités totales : $\rightarrow (C; \bar{C})$ partition de Ω

$$P(V) = P(C \cap V) + P(\bar{C} \cap V)$$

$$\begin{aligned} P(\bar{C} \cap V) &= P(V) - P(C \cap V) \\ &= 0,9 - 0,0124 \\ &= 0,8876 \end{aligned}$$

$\begin{cases} \geq 6 = \text{au moins} \\ > 6 = \text{plus de} \end{cases}$



$$P_{\bar{C}}(V) = \frac{P(\bar{C} \cap V)}{P(\bar{C})} = \frac{0,8876}{0,98} = 0,9057 \approx 10^{-4} \text{ près}$$

4. Calculer $P_V(C)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse.
 - a. « Parmi les personnes non contaminées, il y a dix fois plus de personnes vaccinées que de personnes non vaccinées. »
 - b. « Plus de 98 % de la population vaccinée n'a pas été contaminée. »

$$4) P_V(\bar{C}) = \frac{P(\bar{C} \cap V)}{P(V)} = \frac{0,0124}{0,90} \approx 0,0138 \approx 10^{-4} \text{ près}$$

• La probabilité d'être contaminé sachant qu'on a été vacciné est ^{environ} égale à 0,0138.

$$5) a) \text{ L'inconnu dit que : } " P_{\bar{C}}(V) = 10 \times P_{\bar{C}}(\bar{V}) "$$

$$\text{Or } P_{\bar{C}}(V) = 0,9057 \quad (\text{arrondi à } 3)$$

$$P_{\bar{C}}(\bar{V}) \approx 0,0943$$

$$\text{Donc } 10 \times P_{\bar{C}}(\bar{V}) \approx 10 \times 0,0943 \approx 0,943$$

$$\rightarrow \text{Donc } P_{\bar{C}}(V) \neq 10 \times P_{\bar{C}}(\bar{V}) \text{ car } 0,9057 \neq 0,943$$

$\sim$ Donc l'affirmation est fausse.

$$b) \text{ L'inconnu dit que : } " P_V(\bar{C}) > 0,98 "$$

$$\text{Or } P_V(\bar{C}) = \frac{P(V \cap \bar{C})}{P(V)} = \frac{0,8876}{0,9} \approx 0,9862$$

$$\text{Donc } P_V(\bar{C}) > 0,98 \rightarrow \text{Affirmation vraie.}$$

II. Succession d'épreuves indépendantes

Définition

Lors d'une succession d'épreuves aléatoires, lorsque l'issue d'une épreuve ne dépend d'aucune des issues des épreuves précédentes, on dira qu'on a à faire à des épreuves indépendantes.

Exemple 1 : on considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé équilibré à six faces puis une pièce de monnaie non truquée. Le lancer du dé n'influe pas sur le lancer de la pièce : ces deux épreuves sont indépendantes.

L'univers de la 1^{ère} épreuve :

$$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

L'univers de la seconde :

$$\Omega_2 = \{P, F\} \text{ où } P = \text{"obtenir pile"}, F = \text{"obtenir face"}$$

L'univers de cette expérience aléatoire :

$$\Omega = \{(1, P), (1, F), (2, P), (2, F), (3, P), (3, F), (4, P), (4, F), (5, P), (5, F), (6, P), (6, F)\}$$

(une suite)

Remarque : On peut représenter la situation par un arbre pondéré.

Chacune des issues associées à cette expérience aléatoire a pour probabilité de réalisation :

Définition - vocabulaire

Soit A et B deux ensembles non vides.

Le **produit cartésien** de A et B est l'ensemble, noté $A \times B$ (lire A croix B), constitué des couples $(x; y)$ où x est un élément de A et y un élément de B .

On note cela formellement : $A \times B = \{(x; y), x \in A, y \in B\}$.

$$B \times A = \{(x; y), x \in B, y \in A\}$$

8

Si $A = B$, on notera : $A \times A = A^2$. Par exemple : $\mathbb{R}^2 = \{(x; y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

On définit également sans problèmes le produit cartésien de plus de deux ensembles.

Lorsqu'une expérience aléatoire se compose d'une succession de n épreuves indépendantes d'univers respectifs $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$, l'univers Ω des possibles de cette succession de n épreuves indépendantes est le produit cartésien suivant : $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$.

Les issues de Ω sont les n -uplets $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ où pour tout entier i compris entre 1 et n , $x_i \in \Omega_i$.

Propriété (admise)

Lorsqu'une expérience aléatoire se compose d'une succession de n épreuves indépendantes, la probabilité de réalisation d'une issue $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ est égale AU PRODUIT des probabilités de réalisation de ses composantes $x_1, x_2, \dots, x_n$.

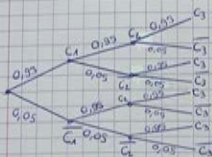
Autrement dit pour l'arbre : la probabilité d'un événement correspondant à un chemin sur l'arbre est obtenue en multipliant les probabilités portées par ses branches.

Exemple 2

Une entreprise de transport possède trois camions. Une étude sur une période donnée de l'état de fonctionnement des camions a montré que, un jour donné, la probabilité qu'un camion soit en panne est égale à 0,05. On admet que la panne d'un camion est indépendante des pannes survenues antérieurement et de celles des autres camions.

- Déterminer la probabilité qu'un jour donné, tous les camions soient en état de fonctionnement.
- Déterminer la probabilité qu'un jour donné, tous les camions soient en panne.
- Les événements : "tous les camions fonctionnent" et "tous les camions sont en panne" sont-ils contraires l'un de l'autre ?

Notons : C_i = "le camion n°i fonctionne"



$$P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = 0,95 \times 0,95 \times 0,95 = 0,95^3$$

$$P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) \approx 0,857$$

$$\begin{aligned} b) P(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3) &= 0,05 \times 0,05 \times 0,05 \\ &= 0,05^3 \\ &= 1,25 \times 10^{-4} \\ &= \frac{1}{800} \end{aligned}$$

$$c) \text{ On vérifie : } P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) + P(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3) = 1$$

$$\text{c'est à dire } 0,857375 + 0,000125 = 1 : \text{vérifié}$$

$$\begin{aligned} &\uparrow \\ &\text{formule} \\ &P(\bar{A}) = 1 - P(A) \\ \Leftrightarrow P(A) + P(\bar{A}) &= 1 \end{aligned}$$

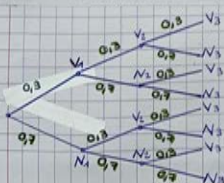
Exercice 6 (important)

Une urne contient 3 boules vertes et 7 boules noires.

On tire au hasard, successivement avec remise, trois boules de l'urne (l'une après l'autre).

On note naturellement : V_i l'événement "extraire une boule verte de l'urne au $i^{\text{ème}}$ tirage" et N_i l'événement "extraire une boule noire de l'urne au $i^{\text{ème}}$ tirage".

- Faire un arbre pondéré de cette expérience aléatoire
- Déterminer la probabilité d'extraire :



$$b) i) P(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = 0,3 \times 0,3 \times 0,3 = 0,027$$

$$ii) M = \text{"les trois boules ont la même couleur"}$$

$$M = P(V_1 \cap V_2 \cap V_3) + P(N_1 \cap N_2 \cap N_3)$$

$$M = 0,3 \times 0,3 \times 0,3 + 0,7 \times 0,7 \times 0,7$$

$$M = 0,027 + 0,343 = 0,37$$

- Questions :
- 2 boules noires dans les 2 premiers tirages puis 1 boule verte au dernier
 - 3 boules de la même couleur

✓ On retiendra que lors de tirages avec remise, on a une **succession d'épreuves aléatoires indépendantes** ! ✓
III- Epreuve et schéma de Bernoulli

Définition

Une expérience aléatoire qui a deux issues possibles (une est appelée succès, l'autre est appelée échec) est appelée une épreuve de Bernoulli.
 En général, l'issue correspondante au succès est notée S, et l'issue correspondante à l'échec est donc S'événement contraire de S), parfois notée E.

Le paramètre p d'une épreuve de Bernoulli n'est autre que la probabilité de l'issue succès, $p = p(S)$. On a nécessairement : $0 < p < 1$ (en particulier, p ne peut pas être égale à 0 ou 1 !).

Arbre associé à une épreuve de Bernoulli :

Les épreuves de Bernoulli sont parmi les expériences aléatoires les plus couramment rencontrées :

Exemples

i) Dans un jeu de 32 cartes comportant 4 as on pioche au hasard une carte.
 Il y a 32 issues possibles, donc cette expérience aléatoire n'est pas une épreuve de Bernoulli.

Cependant, en prenant comme succès l'événement S : "Piocher un as", cette expérience aléatoire constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 0,125$
 L'échec est ici : piocher une carte autre qu'un as

ii) Un internaute regarde une vidéo, et peut lui attribuer un pouce vert 👍, un pouce rouge 👎 ou ne rien faire.

L'expérience consistant à regarder si l'internaute attribue un pouce vert, un pouce rouge, ou ne fait rien n'est pas une épreuve de Bernoulli car... il y a trois issues possibles.
 Par-contre, l'expérience aléatoire consistant à regarder si l'internaute attribue un pouce vert ou non est une épreuve de Bernoulli (par exemple le succès est ici attribuer un pouce vert).
 On ne dispose de pas assez de données pour déterminer son paramètre.

Loi de Bernoulli

Considérons une épreuve de Bernoulli de paramètre p.
 Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès, et la valeur 0 en cas d'échec.

La loi de probabilité de X, c'est-à-dire le **tableau à deux lignes** donnant en première ligne les valeurs prises par X, et en seconde ligne les probabilités associées à ces valeurs, est appelée loi de Bernoulli de paramètre p.

On a donc :

$X=x_i$	0	1
$p(X=x_i)$	$1-p$	p

Calculer l'espérance de X → $E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$

Exemple

Une urne contient 3 boules noires et 5 boules vertes indiscernables au toucher. On pioche au hasard une boule de l'urne. On appelle succès le fait de piocher une boule noire.

Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 sinon.

Donner le nom de X, préciser son paramètre.

$X = 1$ si succès (si boule noire piochée)
 $X = 0$ si échec (si boule verte piochée)

Definition (schéma de Bernoulli)

Soient n un entier naturel non nul, et p un réel appartenant à l'intervalle $]0; 1[$.

L'expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois, une même épreuve de Bernoulli de paramètre p , de façon indépendante, est appelée un schéma de Bernoulli de paramètres n et p .

Une issue de cette expérience aléatoire est une liste de n lettres prises parmi S et $\bar{S}$, du type $(S, \bar{S}, \bar{S}, \dots, S)$.

L'univers de cette expérience aléatoire est $\Omega = \{S, \bar{S}\}^n = \{S, \bar{S}\} \times \{S, \bar{S}\} \times \dots \times \{S, \bar{S}\}$

Exemples

Lancer 10 fois d'affilée une même pièce de monnaie non truquée, et à chaque lancer, est appelé succès le fait d'obtenir pile.

On a ici un schéma de Bernoulli de paramètres : $n = 10$, $p = P(\text{succès}) = 0,5$, (car... non truquée)

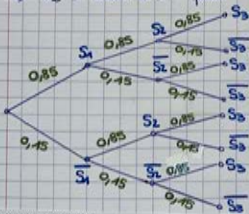
Un joueur de basket réalise trois lancers de façon indépendante.

À chaque lancer, la probabilité qu'il marque un panier est égale à 0,85.

Expliquer pourquoi on peut modéliser cette situation par un schéma de Bernoulli dont on précisera les paramètres.

Faire un arbre de probabilité associé à cette situation.

- Chaque lancer de ballon constitue une épreuve de Bernoulli : le succès est ici de mettre un panier $\rightarrow$ Ici $p = 0,85$
- On répète trois fois de façon indépendante cette même épreuve de Bernoulli
- Donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres : $n = 3$ et $p = 0,85$
- $\rightarrow S_i =$ réussite de la $i^{\text{ème}}$ panier



IV - Loi binomiale

Definition

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de l'intervalle $]0; 1[$.

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p .

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus lors de ces n -épreuves.

La loi de probabilité de cette variable aléatoire X est appelé la loi binomiale de paramètres n et p , notée $\mathcal{B}(n; p)$ (n'a rien à voir avec une certaine banque...).

On dit aussi que X suit la loi binomiale de paramètres n et p et on notera : $X \rightarrow \mathcal{B}(n; p)$
ou $X \rightarrow \mathcal{B}(n; p)$
 X est parfois aussi appelée la loi du nombre de succès.

Exemple : On lance 10 fois d'affilée une même pièce équilibrée, et on note X le nombre de fois où l'on obtient pile.

La variable aléatoire prend pour valeurs tous les nombres entiers compris entre 0 et 10.

X suit donc la loi binomiale de paramètres... $n=10$ et $p=0,5$

Voici quelques questions bien légitimes que tout un chacun se pose naturellement :

- Dans l'exemple précédent, quelle est la probabilité d'obtenir exactement 4 piles lors des 10 lancers ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir autant de piles que de faces ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir moins de piles que de faces ?

Un peu de théorie va nous permettre de répondre à ces questions.

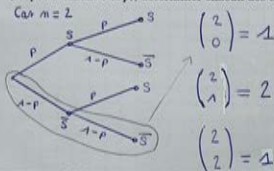
A-Coefficients binomiaux

Définition : soit un schéma de Bernoulli de paramètres n et p , et k un entier naturel tel que : $0 \leq k \leq n$.

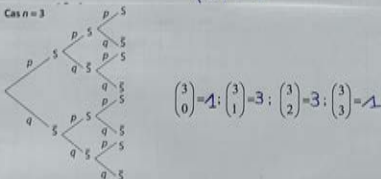
♥♥ On appelle coefficient binomial, ou combinaison de k parmi n , le nombre de chemins conduisant à k succès lors de n répétitions d'une même épreuve de Bernoulli sur l'arbre représentant l'expérience.

Ce nombre se note $\binom{n}{k}$ et se lit " k parmi n ", où n = nb de répétitions de l'exp. de Bernoulli
et k = nb de succès obtenus

Exemple : Grâce aux arbres suivants associés à des schémas de Bernoulli de paramètres 2 et p (respectivement 3 et p), déterminer chacun des coefficients binomiaux suivants :



$\binom{n}{k}$ = nb de chemins sur l'arbre qui conduisent à k succès lors des n répétitions.



Propriété : premières propriétés sur les coefficients binomiaux

Soit un schéma de Bernoulli de paramètres n et p . Soit k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$.

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Remarque : au chapitre "combinatoire et dénombrement" on verra une expression permettant de calculer les coefficients binomiaux rigoureusement.

Sinon, en attendant, momentanément, avec la CALCULATRICE :

• Coefficients binomiaux :

T1 : math puis PRB puis Combinaison // Casio : Optn choix PROB puis nCr

Numworks : calculs, touche valise, probabilité, dénombrement, et choisir $\binom{n}{k}$ en faisant entrée.

Exemple : $\binom{12}{5} = 210$

$$\binom{12}{5} = 792$$

Propriété phare

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

- 1) Les valeurs prises par X sont $\{0; 1; 2; \dots; n\}$: On note $[0; n]$: les entiers
- 2) Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, $P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$
- 3) L'espérance de X est $E(X) = np$

Rq : On note $q = 1 - p$ sa probabilité. Donc $P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times q^{n-k}$

Idee de justification pour le point 2) :

Exemple

Une urne contient 3 boules noires et 5 boules vertes indiscernables au toucher. On pioche au hasard, successivement et avec remise, une boule de l'urne, trois fois d'affilée.

Pour chaque tirage, on appelle succès le fait de piocher une boule noire.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules noires obtenues lors de ces trois tirages.

- a) Nommer la loi de probabilité associée à X en précisant ses paramètres.
- b) Donner la loi de probabilité de X .

0) $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$
= ensemble des valeurs prises par X

a) X suit la loi binomiale de paramètres : $n = 3$; $p = P(S) = \frac{3}{8} = 0,375$

• car : piocher une boule au sac et regarder si elle est noire ou pas constitue une épreuve de Bernoulli de paramètres $p = \frac{3}{8}$

• On répète trois fois de façon indépendante de cette épreuve de Bernoulli
↳ car tirage avec remise

• Donc la variable aléatoire X égale au nb de succès obtenus lors de ces trois répétitions suit la loi Binomiale : $\mathcal{B}(3; 0,375)$

$$X \rightarrow \mathcal{B}(3; 0,375)$$

b) Comme X suit la loi : $\mathcal{B}(3; 0,375)$ on a :

Pour tout entier k tel que : $0 \leq k \leq 3$

$$P(X = k) = \binom{3}{k} \times p^k \times (1-p)^{3-k}$$

Si $n=3$ et $p=0,375$

$$\text{Donc } P(X=k) = \binom{3}{k} \times 0,375^k \times (1-0,375)^{3-k}$$

$$P(X=k) = \binom{3}{k} \times 0,375^k \times 0,625^{3-k} \quad \#$$

$k=1$:

$$P(X=1) = \binom{3}{1} \times 0,375^1 \times 0,625^2$$

$$P(X=1) = 3 \times 0,375 \times 0,625^2 = \frac{2,25}{5,12}$$

$k=2$:

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \times 0,375^2 \times 0,625$$

$$P(X=2) = 3 \times 0,375^2 \times 0,625 = \frac{1,35}{5,12}$$

$k=3$:

$$P(X=3) = \binom{3}{3} \times 0,375^3 \times 0,625^0$$

$$P(X=3) = 1 \times 0,375^3 \times 1 = \frac{27}{5,12}$$

Où la loi de probabilité de X :

$(X=x_i)$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{125}{5,12}$	$\frac{2,25}{5,12}$	$\frac{1,35}{5,12}$	$\frac{27}{5,12}$

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

1) Exprimer plus simplement :

- $p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) + p(X=4) = P(0 \leq X \leq 4) = P(X \leq 4)$
- $p(X \leq 10) + p(X=11) = P(X \leq 11)$
- $p(X \leq 13) - p(X \leq 7)$
- $p(X \geq 5) - p(X \geq 11) = P$

2) Ecrire à l'aide de X chacun des événements suivants :

- obtenir au moins 3 succès
- obtenir plus de 15 succès
- obtenir moins de 21 succès
- obtenir au plus de 5 succès.

$$1) \quad c) \quad \underbrace{P(X \leq 13)}_{\sum_{k=0}^{13} P(X=k)} - \underbrace{P(X \leq 7)}_{\sum_{k=0}^7 P(X=k)} = \underbrace{P(8 \leq X \leq 13)}_{\sum_{k=8}^{13} P(X=k)}$$

$$d) \quad P(X \geq 5) = \underbrace{P(X \geq 5) + \dots + P(X=10)}_{P(5 \leq X \leq 10)} + P(X=11) + \dots + P(X=m)$$

$$\text{Donc } P(X \geq 5) - P(X \geq 11) = P(5 \leq X \leq 10)$$

2) a) "obtenir au moins deux succès"
 $(X \geq 2)$

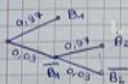
c) "obtenir moins de 21 succès"
 $(X < 21)$

b) "obtenir plus de 15 succès"
 $(X > 15)$

d) "obtenir au plus 5 succès"
 $(X \leq 5)$

Ex : $P(B) = 0,97$

Probabilité d'avoir le bac en au plus deux ans



$$P(R) = P(B_1) + P(\bar{B}_1 \cap B_2) \quad (\text{F. P. T.})$$

$$P(R) = 0,97 + 0,03 \times 0,97$$

$$P(R) = 0,97$$

Remarques importantes :

L'expression de $P(X=k)$, lorsque X suit la loi $\mathcal{B}(n; p)$ se calcule facilement à l'aide de la calculatrice grâce à la séquence suivante :

♥♥♥♥♥ $P(X=k) =$

Numworks : menu calcul, puis valise, puis probabilités, puis choisir Binomiale, et enfin binompdf(m,n,p) : m = nombre de succès voulus, joue le rôle de k ici.

TI : $\boxed{2^{nd}} \boxed{var}$ puis **binomFdp** (et ensuite dans l'ordre : n, p, k).

Casio : OPTN puis STAT puis DIST puis BINM puis Bpd

De même, d'autres fonctions de cumul est implantée sur la calculatrice, qui sait également facilement calculer $P(X \leq k)$ ou n'importe quel autre symbole en tapant :

♥♥♥♥♥ $P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k P(X=i)$

Numworks : menu calcul, puis valise, puis probabilités, puis lois de probabilités, puis choisir Binomiale, et enfin binomcdf(m,n,p) : m = nombre de succès voulus, joue le rôle de k ici.

TI : $\boxed{2^{nd}} \boxed{var}$ puis binomFRép(et ensuite dans l'ordre : n, p, k.

Casio : OPTN puis STAT puis DIST puis BINM puis BCD.

❗ Dans les autres cas de figure, sans la numworks, il faudra "ruser" pour obtenir $p(X > k)$ ou $p(X < k)$ ou encore $p(X \geq k)$, qui ne se calculent pas directement à l'aide de la machine ! ❗

Ceux qui ont une numworks peuvent par-contre directement faire le calcul en allant dans le menu probabilités.

Exemple : soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres : $n = 50$ et $p = 0,23$.

Calculer, en arrondissant à 10^{-4} près : 4 chiffres après virgule

$p(X = 10)$; $p(X \leq 12)$; $p(X \geq 5)$; $p(4 \leq X \leq 9)$

• $P(X=10) \approx 0,1226$ • $P(X \leq 12) \approx 0,6415$ • $P(X \geq 5) \approx 0,9848$

• $P(4 \leq X \leq 9) \approx 0,2550$ • $P(7 < X < 11) = P(8 \leq X \leq 10)$
 • $P(8 < X \leq 13) = P(9 \leq X \leq 13)$

Exercice 1

Reprenons l'exemple qui suit la définition d'une loi binomiale :

On lance 10 fois d'affilée une même pièce équilibrée, et on note X le nombre de fois où l'on obtient pile.

a) Dans l'exemple précédent, quelle est la probabilité d'obtenir exactement 4 piles lors des 10 lancers ? Donner la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie au millième près. $\approx 10^{-3}$ près.

b) Quelle est la probabilité d'obtenir autant de piles que de faces ? Donner la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie à 10^{-4} près.

c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile lors de ces 10 lancers ?

d) Quelle est la probabilité d'obtenir moins de piles que de faces ? Arrondir à 10^{-3} près.

e) Déterminer la valeur de : $p(1 < X \leq 3)$ arrondie au centième près.

f) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un pile et au moins un face au cours des 10 lancers ?

Remarque : bien retenir la procédure pour le cas récurrent dans les exercices du calcul de $p(X \geq 1)$.

X suit la loi binomiale de paramètres : $n = 10$ et $p = 0,5$

$$a) P(X=4) = \binom{10}{4} \times 0,5^4 \times (1-0,5)^{10-4}$$

$$P(X=4) = \binom{10}{4} \times 0,5^4 \times 0,5^6 = \binom{10}{4} \times 0,5^{10}$$

$$P(X=4) \approx 0,205$$

$$b) P(X=5) = \binom{10}{5} \times 0,5^5 \times (1-0,5)^{10-5}$$

$$P(X=5) = \binom{10}{5} \times 0,5^{10}$$

$$P(X=5) \approx 0,2461$$

$$* c) P(X \geq 1) \text{ est ici cherché}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X=0)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$\Leftrightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

car X à valeurs dans $\mathbb{N}$

$$= 1 - \binom{10}{0} \times 0,5^0 \times 0,5^{10}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - 0,5^{10}$$

$$P(X \geq 1) \approx 0,999 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

d) "moins de piles que de faces"

$$X < 10 - X$$

$$2X < 10$$

$$X < 5$$

→ On cherche si $P(X < 5) = P(X \leq 4)$

avec la machine : $P(X \leq 4) \approx 0,377$

$$e) P(1 < X \leq 3) = P(2 \leq X \leq 3) (= P(X=2) + P(X=3))$$

$$\# \text{ Calculatrice : } P(1 < X \leq 3) \approx 0,16$$

$$f) P(1 \leq X \leq 9) \approx 0,998$$

Exercice 9

Un QCM est composé de 20 questions avec une seule réponse correcte parmi les quatre proposées à chaque question.

Mau adopte comme stratégie de répondre au hasard à chacune des 20 questions.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses obtenu par Mau à ce QCM.

0) Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par X .

Dans les questions suivantes, les résultats seront arrondis au millième près :

- Déterminer la probabilité que Mau ait exactement 3 bonnes réponses.
- Déterminer la probabilité que Mau ait au moins une bonne réponse.
- Déterminer la probabilité que Mau ait toutes ses réponses justes.
- Déterminer la probabilité que Mau ait toutes ses réponses fausses.
- Déterminer la probabilité que Mau ait moins de 7 bonnes réponses.
- Déterminer la probabilité de l'événement K suivant : "Mau a plus de réponses fausses que de bonnes réponses".

$$20 - x > x$$

2) Déterminer le nombre moyen de bonnes réponses obtenu par Mau à ce QCM.

0) X suit la loi binomiale de paramètres : $n = 20$ et $p = \frac{1}{4} = 0,25$

• Répondre au hasard à une question donnée est une épreuve de Bernoulli (succès = faire juste)

de paramètre $p = \frac{1}{4} = 0,25$

• On répète 2 fois de façon indépendante, cette même épreuve de Bernoulli :

Donc la V aléatoire égale au nombre de succès obtenus au cours de ces 20 répétitions.

→ Suit la loi binomiale $B(20; 0,25)$

$$a) P(X=3) = \binom{20}{3} \times 0,25^3 \times (1-0,25)^{20-3}$$

$$P(X=3) = \binom{20}{3} \times 0,25^3 \times 0,75^{17}$$

$$P(X=3) \approx 0,134 \approx 10^{-3} \text{ près}$$

$$b) \underbrace{P(X \geq 1)}_A = 1 - \underbrace{P(X < 1)}_{\bar{A}} = 1 - P(X=0)$$

$$P(X \geq 1) = 1 - \binom{20}{0} \times 0,25^0 \times (1-0,25)^{20-0}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - 0,75^{20}$$

$$P(X \geq 1) \approx 0,997$$

$$c) P(X=20) = \overbrace{\binom{20}{20}}^{=1} \times 0,25^{20} \times \overbrace{0,75^0}^{=1} = 0,25^{20}$$

$$P(X=20) \approx 9 \times 10^{-13}$$

$\hookrightarrow 1$ sur mille milliards

$$d) P(X=0) = \binom{20}{0} \times 0,25^0 \times 0,75^{20}$$

$$P(X=0) = 0,75^{20}$$

$$P(X=0) \approx 0,003$$

$$e) P(X < 7) = P(X \leq 6)$$

MACHINE : $P(X < 7) = 0,786$

2) On cherche ici $E(X)$:

Or $X \rightarrow B(20; 0,25)$, donc $E(X) = 20 \times 0,25 = 5$

• En moyenne on peut espérer avoir 5 bonnes réponses.

f) $X \rightarrow B(20; 0,25)$

$K =$ "Plus de réponses fausses que de bonnes réponses"

$X =$ nb de réponses fausses

Donc on veut que $20 - X > X$

$$20 > 2X$$

$$X < 10$$

Donc $P(K) = P(X < 10) = P(X \leq 9)$

$\uparrow$ x entier

• Grâce à la calculatrice :

$$P(K) \approx 0,986 \approx 10^{-3} \text{ puis}$$

Exercice 1

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.

La vaccination contre la grippe est possible; elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné. Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

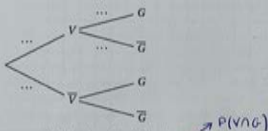
- 40% de la population est vaccinée;
- 8% des personnes vaccinées ont contracté la grippe;
- 20% de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les événements :

V : « la personne est vaccinée contre la grippe »;

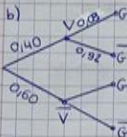
G : « la personne a contracté la grippe ».

- Donner la probabilité de l'événement G .
- Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



- Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.
- La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,20.

$$1) a) \quad P(G) = \frac{20}{100} = 0,20$$



2) On (c'est la formule des probas. conditionnelles)

$$\hookrightarrow P(V \cap G) = P(V) \times P_V(G) = 0,4 \times 0,08 = 0,032$$

3) On cherche ici : $P_{\bar{V}}(G)$

$$\text{On } P_{\bar{V}}(G) = \frac{P(\bar{V} \cap G)}{P(\bar{V})} \quad (\text{f. d. c.}) \quad \text{et} \quad P(\bar{V}) = 0,6$$

Déterminons : $P(\bar{V} \cap G)$: D'après la formule des probas. totales.

$$P(G) = P(G \cap V) + P(G \cap \bar{V})$$

$$0,2 = 0,032 + P(G \cap \bar{V})$$

$$\text{Donc } P(\bar{V} \cap G) = 0,2 - 0,032 = 0,168$$

$$\text{Enfin : } P_V(G) = \frac{0,168}{0,6} = 0,28$$

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

2. Dans cette question, on suppose que $n = 40$.

a. Déterminer la probabilité qu'exactly 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.

b. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

c. Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter le résultat obtenu.

• $P(G) = 0,4$

• $X =$ nbr de personnes vaccinées parmi les n personnes interrogées

1) • Pour chaque personne interrogée, être vaccinée ou pas constitue une épreuve de Bernoulli.
Le succès ici est : "être vaccinée"

↳ Donc $p = 0,4$

• On répète n fois de façon indépendante (tirages successifs avec remise), cette même épreuve de Bernoulli.

Donc X suit la loi binomiale de paramètres : n ; $p = 0,4$

$$X \sim \mathcal{B}(n, 0,4)$$

2) a) Ici $n = 40$, donc $X \sim \mathcal{B}(40, 0,4)$

On cherche ici la valeur de : $P(X=15)$

$$\text{On } P(X=15) = \binom{40}{15} \times 0,4^{15} \times (1-0,4)^{40-15}$$

Grâce à la machine : $P(X=15) \approx 0,123 \approx 10^{-3}$ près

b) On cherche ici la valeur de : $P(X \geq 20)$

$$P(X \geq 20) = \left(\sum_{k=20}^{40} P(X=k) \right)$$

• Grâce à la machine : $P(X \geq 20) \approx 0,130$

c) Rappel : Si $X \sim B(n, p)$, alors $E(X) = n \times p$.

$$E(X) = 40 \times 0,4 = 16 \rightarrow \text{car } n = 40 \text{ et } p = 0,4$$

• En moyenne sur un échantillon de 40 personnes, on peut s'attendre à en trouver 16 qui sont vaccinées.

Exercice 11

Lors d'une kermesse, un organisateur de jeux dispose, d'une part, d'une roue comportant quatre cases blanches et huit cases rouges et, d'autre part, d'un sac contenant cinq jetons portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5.

Le jeu consiste à faire tourner la roue, chaque case ayant la même probabilité d'être obtenue, puis à extraire un ou deux jetons du sac selon la règle suivante :



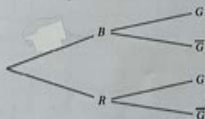
- si la case obtenue par la roue est blanche, alors le joueur extrait un jeton du sac;
- si la case obtenue par la roue est rouge, alors le joueur extrait successivement et sans remise deux jetons du sac.

Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair.

- Un joueur fait une partie et on note B l'événement « la case obtenue est blanche », R l'événement « la case obtenue est rouge » et G l'événement « le joueur gagne la partie ».

- Donner la valeur de la probabilité conditionnelle $P_B(G)$.

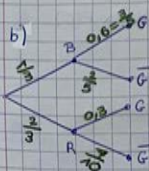
Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :



$$\left(\begin{array}{l} \rightarrow \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = 0,12 \\ \uparrow \\ \text{tirer un jeton impair} \quad \text{sans remise} \end{array} \right)$$

$$1) P_B(G) = \frac{3}{5} = 0,6$$

on pioche un seul jeton du sac : il y a trois jetons impairs 1, 3, 5



- Montrer que $P(G) = 0,4$.
 - Un joueur gagne la partie.
Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu une case blanche en lançant la roue?
- Les événements B et G sont-ils indépendants? Justifier.
- Un même joueur fait dix parties. Les jetons tirés sont remis dans le sac après chaque partie.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

- Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
 - Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le joueur gagne exactement trois parties sur les dix parties jouées.
 - Calculer $P(X \geq 4)$ arrondie à 10^{-3} près.
Donner une interprétation du résultat obtenu.
5. Un joueur fait n parties et on note p_n la probabilité de l'événement « le joueur gagne au moins une partie ».
- Montrer que $p_n = 1 - 0,6^n$.
 - Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure ou égale à 0,99.

A ce stade de l'année, on s'aidera de l'algorithme suivant que l'on complètera :

def seuil():

$n=0$

while $1-0,6^n < 0,99$

$n=n+1$

return (n)

b) On cherche la valeur minimale de n telle que :

$$p_n \geq 0,99$$

$$\text{Donc } 1-0,6^n \geq 0,99$$

→ Python affiche $m=10$

• $m=10$ est l'entier cherché

le programme trouve tout ça à l'aide d'un algo.
 la condition $1-0,6^n < 0,99$ est vraie → Il s'arrête dès lors que $1-0,6^n \geq 0,99$

2) a) D'après la formule des probas totales :

$$P(G) = P(B|G) + P(R|G)$$

$$P(G) = P(B) \times P_G(B) + P(R) \times P_R(G)$$

$$P(G) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{5} + \frac{2}{10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} = \boxed{0,4}$$

2) b) On cherche ici la valeur de $P_G(B)$.

On d'après la f. des probas conditionnelles

$$P_G(B) = \frac{P(B|G)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{5}}{0,4} \quad (q.2.a))$$

$$= \frac{0,2}{0,4} = \boxed{0,5}$$

3) RAPPEL : B et G sont indépendants, si $P(B|G) = P(B) \times P(G)$

au choix : B et G sont indep si $P_G(B) = P(B)$

On $P(B|G) = \frac{1}{5}$ (q.2.a))

et $P(B) \times P(G) = \frac{1}{3} \times 0,4 = \frac{1}{3} \times \frac{4}{10} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

Or $\frac{1}{5} \neq \frac{2}{15}$, Donc $P(B|G) \neq P(B) \times P(G)$

Donc B et G ne sont pas indépendants.

4) X = nb de parties gagnées lors des 10 effectifs

a) X suit la loi binomiale de paramètres : $n=10$ et $p=P(G)=0,4$ (2a)

$$X \sim B(10; 0,4)$$

Bis : chaque partie effectuée constitue une épreuve de Bernoulli (on gagne = succès, on perd = échec)

$$\text{Donc } p = P(G) = 0,4$$

On répète 10 fois de façon indépendante (car tirages avec remise) cette m épreuve de Bernoulli

Donc la v.a. X égale au nb de succès obtenus au cours de ces 10 répétitions suit la loi binomiale $B(10; 0,4)$

$$b) P(X=3) = \binom{10}{3} \times 0,4^3 \times (1-0,4)^{10-3}$$

$$P(X=3) = \binom{10}{3} \times 0,4^3 \times 0,6^7$$

- Grâce à la machine : $P(X=3) \approx 0,215$ à 10^{-3} près

$$c) P(X \geq 4) = \sum_{k=4}^{10} P(X=k) \quad \text{pas obligatoire}$$

- Grâce à la machine ~~il faut~~

$$P(X \geq 4) \approx 0,618$$

La proba de gagner AU MOINS 4 parties est environ égale à 0,618

5) P_m = "Probabilité de gagner au moins une partie"

a) A_m = "Gagner au moins une partie"

$$P_m = P(A_m)$$

$\overline{A_m}$ = "Perdre les m parties faites"

$$\text{Donc } P(\overline{A_m}) = (1-0,4)^m = 0,6^m \quad (\text{car indep. des parties}) \triangle$$

$$\text{Donc } P(A_m) = 1 - \underbrace{0,6^m}_{P(\overline{A_m})}$$

Bis : Soit Y la v.a. égale au nb de parties gagnées au cours de m effectifs

$$Y \sim B(m; 0,4)$$

On cherche ici $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y=0)$

$$P(Y \geq 1) = 1 - \binom{m}{0} \times 0,4^0 \times 0,6^m = 1 - 0,6^m$$

Exercice III

Chaque jour où il travaille, Paul doit se rendre à la gare pour rejoindre son lieu de travail en train. Pour cela, il prend son vélo deux fois sur trois et, si il ne prend pas son vélo, il prend sa voiture.

- lorsqu'il prend son vélo pour rejoindre la gare, Paul ne rate le train qu'une fois sur 50 alors que, lorsqu'il prend sa voiture pour rejoindre la gare Paul rate son train une fois sur 10.
On considère une journée au hasard lors de laquelle Paul sera à la gare pour prendre le train qui le conduira au travail.
On note :

- V l'évènement « Paul prend son vélo pour rejoindre la gare » ;
- R l'évènement « Paul rate son train ».

- Faire un arbre pondéré résumant la situation.
- Montrer que la probabilité que Paul rate son train est égale à $\frac{7}{150}$.
- Paul a raté son train. Déterminer la valeur exacte de la probabilité qu'il ait pris son vélo pour rejoindre la gare.

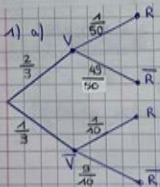
- On choisit au hasard un mois pendant lequel Paul s'est rendu 20 jours à la gare pour rejoindre son lieu de travail selon les modalités décrites en préambule.
On suppose que, pour chacun de ces 20 jours, le choix entre le vélo et la voiture est indépendant des choix des autres jours.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de jours où Paul prend son vélo sur ces 20 jours.

- Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X . Préciser ses paramètres.
- Quelle est la probabilité que Paul prenne son vélo exactement 10 jours sur ces 20 jours pour se rendre à la gare? On arrondira la probabilité cherchée à 10^{-3} .
- Quelle est la probabilité que Paul prenne son vélo au moins 10 jours sur ces 20 jours pour se rendre à la gare? On arrondira la probabilité cherchée à 10^{-3} .
- En moyenne, combien de jours sur une période choisie au hasard de 20 jours pour se rendre à la gare, Paul prend-il son vélo? On arrondira la réponse à l'entier.

- Dans le cas où Paul se rend à la gare en voiture, on note T la variable aléatoire donnant le temps de trajet nécessaire pour se rendre à la gare. La durée du trajet est donnée en minutes, arrondie à la minute. La loi de probabilité de T est donnée par le tableau ci-dessous :

k (en minutes)	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P(T = k)$	0,14	0,13	0,13	0,12	0,12	0,11	0,10	0,08	0,07

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire T et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.



b) On cherche ici la valeur de $P(R)$:

On utilise la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(V \cap R) + P(\bar{V} \cap R)$$

$$P(R) = P(V) \times P_V(R) + P(\bar{V}) \times P_{\bar{V}}(R)$$

$$P(R) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{50} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{10}$$

$$P(R) = \frac{2}{150} + \frac{1}{30} = \frac{2}{150} + \frac{5}{150} = \frac{7}{150}$$

c) On cherche ici la valeur de $P(V)$:

$$\text{On a } P_R(V) = \frac{P(V \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{2}{150}}{\frac{7}{150}} = \frac{2}{7}$$

2) X = nb de jours où Paul a été allé à vélo.

X suit la loi binomiale de paramètres : $n = 20$ et $p = \frac{2}{3}$ car :

- Chaque jour aller travailler à vélo ou en voiture constitue une épreuve de Bernoulli. (le succès est aller à vélo), donc $p = P(V) = \frac{2}{3}$.
- On répète 20 fois de façon indépendante cette même épreuve de Bernoulli.

Donc X est égale au nb de succès obtenus au cours de ces 20 jeux suit la loi binomiale.

$$X \sim \mathcal{B}(20, \frac{2}{3})$$

$$b) P(X=10) = \binom{20}{10} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{20-10}$$

$$P(X=10) = \binom{20}{10} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

Grâce à la calculatrice : $P(X=10) \approx 0,054 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$

$$c) P(X \geq 10) = \sum_{k=10}^{20} P(X=k)$$

Grâce à la calculatrice : $P(X \geq 10) \approx 0,962 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$

d) On cherche ici l'espérance de X : Or X suit une loi binomiale,

$$\text{donc } E(X) = n \times p = 20 \times \frac{2}{3} = \frac{40}{3}$$

$$E(X) \approx 13$$

$$3) E(T) = 10 \times 0,14 + 11 \times 0,13 + 12 \times 0,13 + 13 \times 0,12 + 14 \times 0,12 + 15 \times 0,11 \\ + 16 \times 0,10 + 17 \times 0,08 + 18 \times 0,07 = 13,5 \text{ min}$$

Paul met en moyenne 13 min 30 sec pour se rendre à la gare en voiture

Exercice IV

Un joueur a une addiction à un jeu vidéo... On suppose que :

- S'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est égale à $\frac{1}{4}$.
- S'il perd une partie, la probabilité de perdre la suivante est égale à $\frac{1}{2}$.
- La probabilité de gagner la première partie est égale à $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'événement : "le joueur gagne la $n^{\text{ème}}$ partie".

$$(n \in \mathbb{N}^*)$$

G_n = "le joueur gagne la $n^{\text{ème}}$ partie"

$$u_n = P(G_n)$$

→

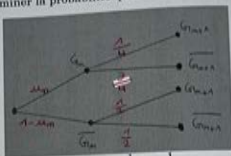
Enfin, on note u_n la probabilité de l'événement G_n .

0) Déterminer la valeur de u_1 .

1a) En détaillant votre démarche, démontrer que $u_2 = \frac{7}{16}$.

1b) Un joueur a perdu la seconde partie. Déterminer la probabilité qu'il ait gagné la première partie.

2a) Compléter l'arbre de probabilité suivant :



2b) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}$.

3) On définit, pour tout entier $n \geq 1$ la suite (V_n) par : $V_n = u_n - \frac{2}{5}$.

a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison, et déterminer la valeur de son premier terme.

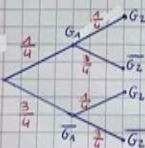
b) Exprimer alors, pour tout entier $n \geq 1$, V_n en fonction de n .

c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n$.

d) Déterminer la limite de (u_n) . Interprétez concrètement ce résultat dans le cadre de la situation étudiée ici.

$$0) \quad u_1 = P(G_1) = \frac{1}{4}$$

$$1) a) \quad u_2 = P(G_2)$$



• D'après la formule des probabilités totales :

$$u_2 = P(G_2) = P(G_2 \cap G_1) + P(G_2 \cap \bar{G}_1)$$

$$u_2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$$

$$\boxed{u_2} = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

1) b) On cherche ici $P(G_1)$

$$\text{On } P(G_1) = \frac{P(G_1 \cap \bar{G}_2)}{P(\bar{G}_2)}$$

$$P(G_1) = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}}{1 - \frac{7}{16}}$$

$$P(\bar{G}_2) = 1 - P(G_2)$$

$$\boxed{P(G_1)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{9}{16}} = \frac{3}{16} \times \frac{16}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$2) b) \quad m \geq 1$$

$$\mu_m = P(G_m)$$

$$\text{Donc } \mu_{m+1} = P(G_{m+1})$$

D'après la formule des probas totales.

$$\mu_{m+1} = P(G_{m+1}) = P(G_m \cap G_{m+1}) + P(\bar{G}_m \cap G_{m+1})$$

$$\mu_{m+1} = P(G_{m+1}) = \mu_m \times \frac{1}{4} + (1 - \mu_m) \times \frac{1}{2}$$

$$\mu_{m+1} = P(G_{m+1}) = \frac{\mu_m}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\mu_m}{2}$$

$$\mu_{m+1} = \frac{\mu_m}{4} - \frac{\mu_m}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\mu_{m+1}} = \frac{\mu_m}{4} - \frac{2\mu_m}{4} + \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{1}{4}\mu_m + \frac{1}{2}}$$

$$3) \quad \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad V_m = \mu_m - \frac{2}{5}$$

$$a) \quad \boxed{V_1} = \mu_1 - \frac{2}{5} = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = \frac{5}{20} - \frac{8}{20} = \boxed{\frac{-3}{20}}$$

But : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad V_{m+1} = q \times V_m$

$$\text{Or } V_{m+1} = \mu_{m+1} - \frac{2}{5} \text{ et } \mu_{m+1} \stackrel{2)b)}{=} \frac{1}{4}\mu_m + \frac{1}{2}$$

$$V_{m+1} = -\frac{1}{4}\mu_m + \frac{1}{2} - \frac{2}{5}$$

$$V_{m+1} = -\frac{1}{4}\mu_m + \frac{1}{10}$$

$$\text{Or } V_m = \mu_m - \frac{2}{5}, \text{ donc } \mu_m = V_m + \frac{2}{5}$$

$$\text{Donc } V_{m+1} = -\frac{1}{4}\left(V_m + \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{10}$$

$$\boxed{V_{m+1}} = -\frac{1}{4}V_m - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \boxed{-\frac{1}{4}V_m}$$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{4}$ et $V_1 = \frac{-3}{20}$

b) $\textcircled{1} \quad m \geq 1$ et (V_n) est géométrique, donc :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad V_m = V_1 \times q^{m-1}$$

$$\boxed{V_m = \frac{-3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{m-1}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^{m-1} = \frac{a^m}{a} \\ a^{m-p} = \frac{a^m}{a^p} \end{array} \right.$$

$$c) \quad \mu_m = V_m + \frac{2}{5} \text{ et d'après 3)b)}$$

$$\mu_m = \frac{-3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{m-1} + \frac{2}{5}$$

$$\mu_m = -\frac{3}{20} \times \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^m}{-\frac{1}{4}} + \frac{2}{5} = -\frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^m \times (-4) + \frac{2}{5} = \frac{-3}{20} \times (-4) \times \left(-\frac{1}{4}\right)^m + \frac{2}{5}$$

$$= \frac{3}{5} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^m + \frac{2}{5}$$

d) $-1 < -\frac{1}{4} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$

Donc par produit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{5} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$

Donc par somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{5}$

La probabilité de gagner une partie au long terme (après un grand nb de parties effectuées) est égal à $\frac{2}{5}$

Exercice I

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 4% des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.

On choisit au hasard n pièces produites par la chaîne de fabrication.

Le nombre de pièces produites est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses tirées.

Dans les trois questions suivantes, on prend $n = 50$.

Quel est le plus petit entier naturel k tel que la probabilité de tirer au plus k pièces défectueuses soit supérieure ou égale à 95%?

a. 2

b. 3

c. 4

d. 5

$n = 50$
 $X =$ nb de pièces défectueuses (parmi les 50) } X suit la loi binomiale de paramètres : $n = 50$ et $p = 0,04$

On cherche le plus petit entier k tel que $P(X \leq k) \geq 0,95$

$$P(X=0) + P(X=1) + \dots + P(X=k) \geq 0,95$$

Grâce à la calculatrice : $k = 4$ l'entier cherché

Exercice II

Une entreprise appelle des personnes par téléphone pour leur vendre un produit.

— L'entreprise appelle chaque personne une première fois :

- la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à 0,6;
- si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,3.

— Si la personne n'a pas décroché au premier appel, on procède à un second appel :

- la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à 0,3;
- si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,2.

— Si une personne ne décroche pas au second appel, on cesse de la contacter.

On choisit une personne au hasard et on considère les événements suivants :

D_1 : « la personne décroche au premier appel »;

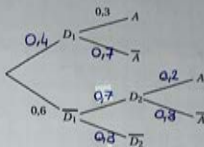
D_2 : « la personne décroche au deuxième appel »;

A : « la personne achète le produit ».

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.
2. En utilisant l'arbre pondéré, montrer que la probabilité de l'événement A est $P(A) = 0,204$.
3. On sait que la personne a acheté le produit.
Quelle est la probabilité qu'elle ait décroché au premier appel?



Partie B

On rappelle que, pour une personne donnée, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,204.

1. On considère un échantillon aléatoire de 30 personnes.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes de l'échantillon qui achètent le produit.
 - a. On admet que X suit une loi binomiale. Donner, sans justifier, ses paramètres.
 - b. Déterminer la probabilité qu'exactly 6 personnes de l'échantillon achètent le produit. Arrondir le résultat au millième.
 - c. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X .

Interpréter le résultat.

2. Soit n un entier naturel non nul.

On considère désormais un échantillon de n personnes.

Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins l'une des personnes de l'échantillon achète le produit soit supérieure ou égale à 0,99.

$$2) P(A) = P(D_1 \cap A) + P(D_2 \cap A) \quad (f.d.t.)$$

$$P(A) = 0,4 \times 0,3 + 0,6 \times 0,7 \times 0,2$$

$$P(A) = 0,12 + 0,084 = 0,204$$

$$3) \text{ On cherche ici : } P_A(D_1)$$

$$P_A(D_1) = \frac{P(D_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{0,12}{0,204} = \frac{120}{2040} = \frac{10}{17}$$

PARTIE B :

1) $X =$ nb de personnes ^{parmi les 30} qui achètent le produit

a) X suit la loi binomiale de paramètres : $n = 30$ et $p = 0,204$

b) $P(X=6)$ est ici cherché

$$P(X=6) = \binom{30}{6} \times 0,204^6 \times (1-0,204)^{30-6}$$

$$P(X=6) = \binom{30}{6} \times 0,204^6 \times 0,796^{24}$$

$$P(X=6) \approx 0,176 \approx 10^{-3} \text{ près}$$

c) $E(X) = n \times p$ car X suit une loi binomiale

$$E(X) = 30 \times 0,204 = 6,12$$

En moyenne sur un échantillon de 30 personnes on peut espérer qu'il y en ait sensiblement plus que 6 qui achètent le produit.

2) Soit X_n la v.a. égale au nb de personnes achetant le produit dans un échantillon de taille n .

X_n suit la loi binomiale de paramètres : n et $p = 0,204$.

On veut que $P(X_n \geq 1) \geq 0,99$

* Au moins 1 est le contraire de aucun

$$1 - P(X_n = 0) \geq 0,99$$

$$1 - \binom{n}{0} \times 0,204^n \times 0,796^n \geq 0,99$$

$$1 - 0,796^n \geq 0,99 \quad (\text{avec calculatrice})$$

→ Donc ici l'échantillon doit être d'au moins 21 personnes.

Exercice VII

Un jeu vidéo possède une vaste communauté de joueurs en ligne. Avant de débiter une partie, le joueur doit choisir entre deux « mondes » : soit le monde A, soit le monde B.

On choisit au hasard un individu dans la communauté des joueurs.

Lorsqu'il joue une partie, on admet que :

- la probabilité que le joueur choisisse le monde A est égale à $\frac{2}{5}$;
- si le joueur choisit le monde A, la probabilité qu'il gagne la partie est de $\frac{7}{10}$;
- la probabilité que le joueur gagne la partie est de $\frac{12}{25}$.

On considère les événements suivants :

- A : « Le joueur choisit le monde A »;
- B : « Le joueur choisit le monde B »;
- G : « Le joueur gagne la partie ».

1. La probabilité que le joueur choisisse le monde A et gagne la partie est égale à :

a. $\frac{7}{10}$

b. $\frac{3}{25}$

c. $\frac{7}{25}$

d. $\frac{24}{125}$

2. La probabilité $P_B(G)$ de l'événement G sachant que B est réalisé est égale à :

a. $\frac{1}{5}$

b. $\frac{1}{3}$

c. $\frac{7}{15}$

d. $\frac{5}{12}$

Dans la suite de l'exercice, un joueur effectue 10 parties successives.
On assimile cette situation à un tirage aléatoire avec remise.

On rappelle que la probabilité de gagner une partie est de $\frac{12}{25}$.

3. La probabilité, arrondie au millième, que le joueur gagne exactement 6 parties est égale à :

a. 0,859

b. 0,671

c. 0,188

d. 0,187

4. On considère un entier naturel n pour lequel la probabilité, arrondie au millième, que le joueur gagne au plus n parties est de 0,207. Alors :

a. $n = 2$

b. $n = 3$

c. $n = 4$

d. $n = 5$

5. La probabilité que le joueur gagne au moins une partie est égale à :

a. $1 - \left(\frac{12}{25}\right)^{10}$

b. $\left(\frac{13}{25}\right)^{10}$

c. $\left(\frac{12}{25}\right)^{10}$

d. $1 - \left(\frac{13}{25}\right)^{10}$

1) $P(ANG) = P(A) \times P_A(G) = \frac{2}{5} \times \frac{7}{10} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$

RÉPONSE : C

2) $P_B(G) = \frac{P(ANG)}{P(B)}$ avec $P(B) = \frac{3}{5}$

On $P(G) = P(ANG) + P(BNG)$
 $\frac{12}{25} = \frac{7}{25} + P(BNG)$

$P(BNG) = \frac{12}{25} - \frac{7}{25} = \frac{5}{25}$

Donc $P_B(G) = \frac{\frac{5}{25}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{25} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{75} = \frac{1}{3}$ RÉP B

3) $X = \text{nb de parties gagnées}$

$X \sim \mathcal{B}(10; \frac{12}{25})$

$P(X=6) = \dots$

$P(X=6) \approx 0,188$, RÉPONSE C

4) $P(X \leq n) = 0,207$

Trouver n ?

Calculatrice : $n = 3$

RÉPONSE : B

5) $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$
 $= 1 - \binom{10}{0} \times \left(\frac{12}{25}\right)^0 \times \left(1 - \frac{12}{25}\right)^{10-0}$

$= 1 - \left(\frac{13}{25}\right)^{10}$

RÉPONSE D