

Chapitre III

Limites de suites

I - La notion de limite

A - Limite infinie de suite

Définition

Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$, cela signifie que les valeurs prises par cette suite finissent par dépasser, à partir d'un certain rang, n'importe quel nombre arbitrairement fixé, aussi grand soit-il.

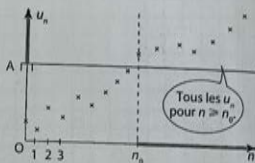
On notera : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, et on dira que la suite (u_n) diverge... vers... $+\infty$..

En d'autre termes, tout intervalle ouvert de la forme : $]A ; +\infty[$, où A est un réel quelconque contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Illustration :

Aussi grand que soit le nombre réel A , on peut trouver un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n > A$.

En termes imagés « aussi haute que l'on place la barrière horizontale A , les termes u_n parviennent à passer définitivement au-dessus ».



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$$

Propriété (limites de suites de référence, d'usage quotidien pour la suite)

Les suites définies sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = n$, $v_n = n^2$, $w_n = n^3$ et $x_n = \sqrt{n}$ ont pour limite

On a donc : ♥♥♥♥ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^A = +\infty$ ♥♥♥♥♥

Ces résultats, d'usage quotidien tout au long de l'année, sont à connaître impérativement et sans hésitation...

Prouvons par exemple que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$:

• Soit A un réel positif arbitrairement fixé : $\sqrt{n} > A > 0$

Donc $\sqrt{n} > A \Leftrightarrow n > A^2$ par croissance de la fonction carré sur $[0 ; +\infty[$
 $n > A^2$: tout entier n strictement supérieur à A^2 convient.

De la même manière, l'écriture $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme : $] -\infty ; A[$,

où A est un réel quelconque, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

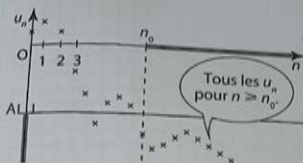
On dit que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n) = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 = -\infty$$

$$\rightarrow -n^2 \neq (-n)^2$$

Illustration :



Exemple

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = -n^2$.
Cette suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

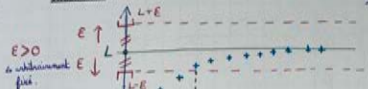
B - Limite finie de suite

Définition

Dire qu'une suite (u_n) admet pour limite un nombre réel L signifie que tout intervalle ouvert centré en la valeur L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On notera : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$, et on dira que la suite (u_n) **CONVERGE** vers L ou encore, par abus de langage, que u_n tend vers L lorsque n tend vers $+\infty$.

Illustration :



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

n	10	100	1000	10000
$\frac{1}{n}$	0,1	0,01	0,001	0,0001

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

• Ici $n \geq 10$, alors $L - \epsilon \leq u_n \leq L + \epsilon$

A partir d'un certain rang, les termes de la suite s'accumulent autour de L .

Remarque : il y a unicité de la limite sous réserve d'existence.

Propriété (limites de suites de référence, d'usage quotidien pour la suite)

♥♥ Les suites de terme général $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ sont convergentes et ont pour limite 0.

On a donc : ♥♥♥♥ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$; $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ♥♥♥♥ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$

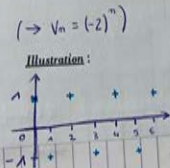
C - Suites n'admettant pas de limite

Il existe des suites n'admettant pas de limite (ni finie, ni infinie).

→ Exemple : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = (-1)^n$.

Les valeurs prises par cette suite, sont alternativement -1 et 1 .

Illustration :



✗ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = \text{absolument}$

$\begin{cases} u_n = 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ u_n = -1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

Definition

Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Soit (u_n) une suite divergente :

On a donc plusieurs alternatives possibles : soit u_n tend vers $+\infty$, soit u_n tend vers $-\infty$, soit u_n ne se rapproche d'aucun nombre fixe.

Exemples de suites divergentes

- 1) La suite (u_n) définie par, pour tout entier naturel n , $u_n = n^k$ diverge vers $+\infty$.
- 2) La suite (u_n) définie par, pour tout entier naturel n , $u_n = -n$ diverge vers $-\infty$.
- 3) La suite (u_n) définie par, pour tout entier naturel n , $u_n = (-1)^n$ diverge (elle prend alternativement les valeurs 1 et -1).

II - Opérations sur les limites (6^{ème} Ce paragraphe est le plus important du chapitre.)

A - Limite d'une somme

Soit (u_n) et (v_n) deux suites admettant une limite (finie ou infinie). Soient L et L' deux réels.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée (I.I)

Exemples $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3$ } $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = 5$ $u_n = 2 + \frac{1}{n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{1}{n} + n^2$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$$u_n = \frac{1}{n} + n^2$$

Par limites de référence :

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$$

$$\rightarrow \text{Donc par limite de somme : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + n^2 \right) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Remarque : la suite (u_n) diverge vers $+\infty$

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = n^3 + n^2 + 3$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Par limites de référence :

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty ; \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty ; \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3 \quad \text{Donc par limite de somme : } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

(limite d'une suite constante égale à 3)

Donnons quelques exemples pour bien comprendre la dernière colonne du tableau (forme indéterminée) :

Formes indéterminées par la somme :

$$u_n = n : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \quad / \quad v_n = -n+1 : \lim_{n \rightarrow +\infty} -n+1 = -\infty$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n + v_n = n + (-n+1) = 1$$

Donc $(u_n + v_n)$ est constante

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = 1$$

Attention : Si (u_n) est constante et égale à k ($\forall n \in \mathbb{N}, n = k$) alors (u_n) converge vers k :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = k$$

Bis $u_n = 2n$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

$v_n = -n$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

Or $u_n + v_n = 2n + (-n) = n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$

• $u_n = n + \frac{1}{n}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

$v_n = -n$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

Or $u_n - v_n = \frac{1}{n}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = 0$

B - Limite d'un produit

Soit (u_n) et (v_n) deux suites admettant une limite (finie ou infinie). Soient L et L' deux réels.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	$L > 0$	$L < 0$	$L > 0$	$L < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) =$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I.$

Exemples

Déterminer la limite de chacune des suites suivantes :

a) $u_n = (1 + \frac{1}{\sqrt{n}})(-n + 4)$

b) $v_n = \frac{4}{n}$

c) $w_n = n^2 - 2024n$

d) $z_n = \sqrt{n} - 2n$

a) $u_n = (1 + \frac{1}{\sqrt{n}})(-n + 4)$

Par limites de référence :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

} Donc par somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) = 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} -n = -\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 = 4$

} Donc par somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n + 4) = -\infty$

• Par limite de produit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

b) $v_n = \frac{4}{n} = 4 \times \frac{1}{n}$

Par limites de référence : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 = 4$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Donc par limite de produit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

$$c) u_n = n^2 - 2024n (= n^2 + (-2024n))$$

Par limites de référence : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2024n) = -\infty$

Donc on a une forme indéterminée pour la somme
F.T.

$$u_n = n^2 - 2024n = n(n - 2024)$$

Par limites de référence :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 2024) = +\infty$$

Donc par limites de produit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(n - 2024) = +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$d) z_n = \sqrt{n} - 2n = \sqrt{n} - 2 \times n$$

Par limites de référence : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2n) = -\infty$

Donc forme indéterminée pour la somme.

$$z_n = \sqrt{n} - 2n = \sqrt{n} (1 - 2\sqrt{n})$$

☀ : On met en facteur $\sqrt{n}$

Par limites de référence : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2\sqrt{n} = -\infty$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - 2\sqrt{n}) = -\infty$

Donc par limites de produit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} (1 - 2\sqrt{n}) = -\infty$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = -\infty$$

$$e) z_n = \sqrt{n} - 2n$$

$$\text{Mettre } n \text{ en facteur} \rightarrow z_n = n \left(\frac{\sqrt{n}}{n} - 2 \right) \rightarrow \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{n} \times 1}{\sqrt{n} \times \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad z_n = n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 2 \right)$$

$$f) h_n = 3n^2 + 5n - 1$$

$$\text{Mettre } n^2 \text{ en facteur} \rightarrow h_n = n^2 \left(3 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$n^2 \left(3 + \frac{5n}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

$$g) t_n = 2n^3 - 5n^2 + 3n - 8$$

$$\text{Mettre } n^3 \text{ en facteur} \rightarrow t_n = n^3 \left(2 - \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{8}{n^3} \right) \left\{ \begin{array}{l} n^3 \times ? = -5n^2 \\ ? = \frac{-5n^2}{n^3} \\ = \frac{5 \times n^2 \times n}{n^3 \times n^3} = \frac{-5}{n} \end{array} \right.$$

$$* u_n = 5n^2 : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$v_n = \frac{1}{n^2} : \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

$$\text{Or } u_n \times v_n = 5n^2 \times \frac{1}{n^2} = 5$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \max v_n = 5$$

$$w_n = \frac{1}{n} : \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$$

$$x_n = n^2 : \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$$

$$\text{Or } u_n \times v_n = \frac{1}{n} \times n^2 = n : \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n \times x_n = +\infty$$

On retiendra donc que lorsqu'on est en présence d'une forme indéterminée, tenter une **FACTORISATION** permet fréquemment de lever l'indétermination.

Donnons quelques exemples pour bien comprendre la dernière colonne du tableau (forme indéterminée) :

C - Limite d'un quotient.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$	L	$L > 0$	$L > 0$	$L < 0$	$L < 0$	0	$-\infty$ ou $+\infty$	0
Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L' \neq 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	$-\infty$ ou $+\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} \right) =$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	F.I.

Exemples

Déterminer la limite de chacune des suites suivantes :

$$a) u_n = \frac{2}{n^2 + n - 1}$$

$$b) v_n = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{2 + \frac{3}{n}}$$

$$c) w_n = \frac{n+5}{n^2+1}$$

$$d) z_n = \frac{-2n^2 + 3n + 1}{3n^2 + n + 4}$$

$$a) u_n = \frac{2}{n^2 + n - 1}$$

Par limite de référence : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1) = -1$

$$\text{Donc par somme : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + n - 1) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2$$

$$\text{Donc par limite de quotient : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2 + n - 1} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

$$b) v_n = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{2 + \frac{3}{n}}$$

$$\text{Par limite de référence : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 ; \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 1$$

(1 - chose proche de 0 = chose proche de 1)

$$\text{De même : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 ; \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{n} \right) = 2$$

$$\text{Par limite de quotient : } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$$

$$m^2 \times \frac{1}{m} = m$$

c) $w_m = \frac{m+5}{m^2+1}$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} (m+5) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} (m^2+1) = +\infty$$

Donc on a une forme indéterminée du type $\frac{+\infty}{+\infty}$

$$\rightarrow w_m = \frac{m+5}{m^2+1} = \frac{n \left(1 + \frac{5}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} \quad \left(\frac{n \times a}{n^2 \times b} = \frac{a}{n \times b} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{1 + \frac{5}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}}$$

Par limite de référence : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

• Donc par somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1$

• Donc par quotient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{5}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 1$ } Donc par produit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \times \frac{1 + \frac{5}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 0$$

• **Bis** : $w_m = \frac{m+5}{m^2+1} = \frac{\cancel{m} \left(\frac{1}{\cancel{m}} + \frac{5}{m^2} \right)}{\cancel{m^2} \left(1 + \frac{1}{m^2} \right)}$

$$= \frac{\frac{1}{m} + \frac{5}{m^2}}{1 + \frac{1}{m^2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_m = 0$$

d) $z_m = \frac{-2m^2+3m+1}{3m^2+m+4} \rightarrow \text{f.i.}$

$$= \frac{\cancel{m^2} \times \left(-2 + \frac{3}{m} + \frac{1}{m^2} \right)}{\cancel{m^2} \times \left(3 + \frac{1}{m} + \frac{4}{m^2} \right)} = \frac{-2 + \frac{3}{m} + \frac{1}{m^2}}{3 + \frac{1}{m} + \frac{4}{m^2}}$$

Par limite de référence : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2 = -2$

Donc par somme et produit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = -2 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} \right) = 3$$

Par limite de quotient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \frac{-2}{3}$

Remarque : On retiendra donc qu'il existe, en terminale, 4 types de formes indéterminées, que l'on note abusivement :

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{-\infty}{\infty}, \frac{\infty}{0}, \frac{-\infty}{0}, \frac{0}{\infty}, \frac{0}{0} \quad \text{F.I.}$$

On s'interdit d'utiliser ces abus dans la rédaction, cela doit rester mental !

Contrairement à une idée faussement répandue, " $\frac{\infty}{0}$ " n'est pas une forme indéterminée !

III - Limites obtenues par comparaison ou encadrement

♥♥ Théorème de comparaison pour les limites infinies ♥♥

Soit (u_n) et (v_n) deux suites :

- 1) Si à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- 2) Si à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

En des termes imagés, ce théorème dit :

- 1) "Si je suis supérieur à des valeurs astronomiquement grandes, alors je suis moi aussi astronomiquement grande"
- 2) "Si je suis inférieur à des valeurs petites, alors je suis moi aussi petit"

Exemple

Déterminer, en justifiant, la limite de chacune des suites suivantes :

a) $u_n = 2n + (-1)^n$

b) $v_n = \cos(n) - n$

a) $u_n = 2n + (-1)^n$

Rappel : $(-1)^n$ est une suite qui n'admet pas de limite, donc interdiction d'utiliser les tableaux

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n \geq -1$

Donc $2n + (-1)^n \geq 2n - 1$

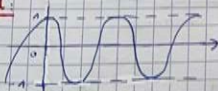
$$u_n \geq 2n - 1$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n - 1) = +\infty$
et $u_n \geq 2n - 1$

Donc par comparaison des limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

b) $v_n = \cos(n) - n$

Rappel :



La fonction cosinus (et sinus) n'admettant pas de limites en $+\infty$

⚠ $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos(n) \leq 1$, donc $-n - 1 \leq \cos(n) \leq 1 - n$

$$\forall n \leq 1 - n$$

Donc

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - n) = -\infty$

Donc d'après le théorème de comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

Exercice 1

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel $n \geq 4$, par : $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

a) Ecrire l'expression de u_n à l'aide du symbole $\sum$.

b) Justifiez que pour tout entier k , si $1 \leq k \leq n$, alors on a : $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$, puis en déduire que pour tout entier $n \geq 4$, on a : $u_n \geq \sqrt{n}$.

c) En déduire que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Pour $n \geq 4$ $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

a) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$

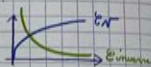
b) $1 \leq k \leq n$

(conservat° du sens des inégalités)

Donc par croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur $[0; +\infty[$ on a :

$$\sqrt{1} \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{n}$$

Donc par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$



$$\frac{1}{1} \geq \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Donc : (*) $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$

On applique (*) avec tous les entiers k allant de 1 à n :

(*) $k=1$: $\frac{1}{\sqrt{1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$

(*) $k=2$: $\frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\vdots$

(*) $k=n$: $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\begin{cases} a \geq b \\ c \geq d \end{cases} \text{ alors : } a+c \geq b+d$

On fait la somme membre à membre de ces n inégalités de $\hat{m}$ sens

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{u_n} \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots}_{n \text{ termes}} = n \times \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\Rightarrow u_n \geq \sqrt{n}$

$n \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} \times \sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$

d) D'après q.c) : $u_n \geq \sqrt{n}$

e) Car par limite de référence : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Donc d'après le théorème de comparaison :

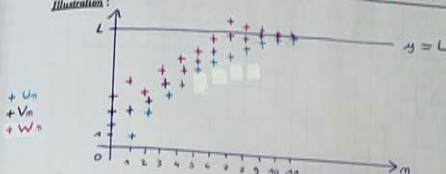
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

♥♥♥♥ Théorème d'encadrement (communément appelé théorème des gendarmes) ♥♥♥♥

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites.

Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la MÊME limite L avec L réel, alors, (v_n) converge vers L c'est à dire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$

Illustration :



On retiendra bien qu'il faut que 3 conditions soient vérifiées pour pouvoir appliquer ce théorème :

- ① - Avoir le double encadrement : $u_n \leq v_n \leq w_n$
- ② - (u_n) converge vers L ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$)
- ③ - (w_n) converge vers L ($\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$)

Preuve : admise. } = ont la MÊME limite

Exemples fondamentaux

Déterminer les limites des suites suivantes définies sur $\mathbb{N}^*$:

a) $v_n = \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$

b) $u_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$

c) $w_n = \frac{2n^2 + 3n + (-1)^n}{n^2 + 5}$

a) $v_n = \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

⚠ $(\sin(n))$ n'admet pas de limite

$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \sin(n) \leq 1$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{-1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ car $\sqrt{n} > 0$

Donc $\boxed{\frac{-1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}}$

Par limite de référence : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}} = 0$ / $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes / double encadrement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} = 0$

Donc (v_n) converge vers 0

b) $u_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$

$-1 \leq (-1)^n \leq 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n - 1 \leq n + (-1)^n \leq n + 1$

$\frac{n-1}{n} \leq \frac{n + (-1)^n}{n} \leq \frac{n+1}{n}$ car $n > 0$

suite $\Rightarrow$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$(*) \begin{cases} \frac{n-1}{n} = \frac{n}{n} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \\ \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$(*) \quad 1 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n} \quad (1)$$

Par limites de référence : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$; donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$ (2)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1 \quad (3)$$

D'après le théorème des gendarmes

$$\hookrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

$$c) \quad w_n = \frac{2n^2 + 3 \times (-1)^n}{n^2 + 5}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : -1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$\times 3 \quad -3 \leq 3 \times (-1)^n \leq 3$$

$$+ 2n^2 \quad 2n^2 - 3 \leq 2n^2 + 3 \times (-1)^n \leq 2n^2 + 3$$

$$\div n^2 + 5 \quad \frac{2n^2 - 3}{n^2 + 5} \leq \frac{2n^2 + 3 \times (-1)^n}{n^2 + 5} \leq \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 5} \quad \div n^2 + 5 \quad \frac{n^2 + 5 > 0}{n^2 + 5}$$

$$\frac{+ \infty}{+ \infty} \quad \left[\frac{2n^2 - 3}{n^2 + 5} \leq w_n \leq \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 5} \right]$$

Recherchons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 3}{n^2 + 5}$:

$$\text{On } \frac{2n^2 - 3}{n^2 + 5} = \frac{2 - \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{5}{n^2}} = \frac{2 - \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{5}{n^2}}$$

Par limites de référence : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

Donc par produit et somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - \frac{3}{n^2}) = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{5}{n^2}) = 1$

Donc par limite de quotient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{5}{n^2}} = \frac{2}{1}$ c'est à dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 3}{n^2 + 5} = 2$

Exactement le même raisonnement conduit à :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 5} = 2$$

• D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 2$

II - Comportement à l'infini d'une suite géométrique

Propriété

Soit q un réel, et considérons la suite $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$ (= suite constante)
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) n'admet aucune limite

Mémo: une suite géométrique de raison q converge si et seulement si $-1 < q < 1$

Preuve dans le cas où $q \geq 1$: $q > 1$, donc $q = 1 + x$ avec $x > 0$
donc $q^n = (1+x)^n$

D'après l'inégalité de Bernoulli (chap 2, ex. 1), $(1+x)^n \geq 1 + nx$ car $x > 0$
Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$; comme $x > 0$, par limite du produit: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+x)^n = +\infty$

Exemples

1) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2n}$

2) Soit $v_n = (-\frac{1}{2})^n$. Déterminer: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

1) $e \approx 2,718$, donc $e > 1$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$

• $e^{-2n} = q^n$ ou $q = e^{-2}$

car $e^{-2n} = (e^{-2})^n$

Or $e^{-2} \approx 0,14$

Donc $-1 < e^{-2} < 1$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-2})^n = 0$

2) $v_n = (-\frac{1}{2})^n = q^n$ ou $q = -\frac{1}{2}$

Or $-1 < -\frac{1}{2} < 1$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{2})^n = 0$

Exercice 2

Déterminer: a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+2^n}{e^n}\right)$; b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1,75^n - 4 \times 0,3^n)$; c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^n + 3^n}{5^n + 6^n}\right)$.

a) Forme indéterminée pour le quotient $\frac{+\infty}{+\infty}$

$$M1: \frac{1+2^n}{e^n} = \frac{1}{e^n} + \frac{2^n}{e^n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n + \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

Or $\frac{1}{e} \approx 0,37$ donc $-1 < 0,37 < 1$
 $\frac{2}{e} \approx 0,74$ donc $-1 < 0,74 < 1$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n = 0$

Par limite de somme: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{2^n}{e^n}\right) = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+2^n}{e^n}\right) = 0$

b) $1,75 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,75^n = +\infty$

$-1 < 0,3 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,3^n = 0$

Par produit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-4 \times 0,3^n) = 0$

Par limite de somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1,75^n - 4 \times 0,3^n) = +\infty$

c) F.I. du type pour le quotient $\frac{+\infty}{+\infty}$

$$u_n = \frac{2^n + 3^n}{5^n + 6^n} = \frac{3^n \times (\frac{2}{3})^n + 1}{6^n \times (\frac{5}{6})^n + 1} = \frac{3^n \times (\frac{2}{3})^n + 1}{(\frac{5}{6})^n + 1} = \left(\frac{3}{6}\right)^n \times \frac{(\frac{2}{3})^n + 1}{(\frac{5}{6})^n + 1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{(\frac{2}{3})^n + 1}{(\frac{5}{6})^n + 1}$$

$-1 < \frac{1}{2} < 1$; $-1 < \frac{2}{3} < 1$; $-1 < \frac{5}{6} < 1$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$

Par somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{5}{6}\right)^n + 1\right) = 1$

Par quotient et produit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Exercice 3

(u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \sqrt{e^{2n} + n + 1}$. En utilisant un théorème de comparaison, déterminer la limite de la suite (u_n) .

$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \sqrt{e^{2n} + n + 1}$

$e^{2n} + n + 1 > n$ car $e^{2n} > 0$

Donc $\sqrt{e^{2n} + n + 1} > \sqrt{n} \xrightarrow{1 > 0}$ car la fonction $\sqrt{\quad}$ croît sur $[0; +\infty[$
 $u_n > \sqrt{n}$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ (par limite de référence)

Par théorème de comparaison : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

V- Algorithme sur les suites (boucle While)

Algorithme de détermination d'une valeur seuil

Exo BAC On considère une population de bactéries dont la population augmente de 40 % toutes les heures. On note u_n le nombre de milliers de bactéries après n heures, et on donne $u_0 = 1$ (quantité initiale de bactéries).

a) Exprimer u_n en fonction de n .

0) Combien y a-t-il de bactéries au départ ? $u_0 = 1$ (en milliers) donc 1000

- b) Déterminer le sens de variation de cette suite.
 c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.
 d) En déduire qu'il existe un rang, noté n_0 , à partir duquel $u_n \geq 10$.
 e) On considère l'algorithme suivant écrit en langage naturel : On entre dans

VARIABLES :	A, n nombres, A de type réel, n de type entier.
ENTREE :	Demander la valeur de A.
INITIALISATION :	Affecter à n la valeur 0.
TRAITEMENT :	Tant que $1,4^n < A$ Remplacer n par n + 1. Fin du Tant que
SORTIE :	Afficher n.

Que fait concrètement cet algorithme ?

f) Voici un script Python correspondant à cet algorithme de seuil :

```
def seuil(A):
    n=0
    while 1.4**n < A :
        n=n+1
    return n
```

Le coder, puis déterminer la valeur du plus petit entier n_0 à partir duquel $u_n \geq 10$. Même question avec $n_0 \geq 100$. Et si l'on tapait : seuil(0), qu'aurait-on comme affichage en sortie ?

a) u_n = nbr de bactéries au bout de n heures

$\forall m \in \mathbb{N}, u_{m+1} = 1,4 u_m \Rightarrow$ car augmente de 40% revient à multiplier par 1,4
 Donc (u_n) est géométrique de raison $q = 1,4$ ($1 + \frac{40}{100}$)

Donc ($\neq$ cause de 1°) : $\forall m \in \mathbb{N}, u_m = u_0 \times q^m$
 $\frac{u_m}{u_0} = 1 \times 1,4^m$
 $u_m = 1,4^m$

$$b) \forall m \in \mathbb{N}, u_{m+1} - u_m = 1,4^{m+1} - 1,4^m = 1,4^m \times 1,4 - 1,4^m = 1,4^m (1,4 - 1) = 0,4 \times 1,4^m$$

Or $0,4 > 0, 1,4 > 0$, donc $1,4^m > 0$

Par produit : $0,4 \times 1,4^m > 0$

$\forall m \in \mathbb{N}, u_{m+1} - u_m > 0$ Donc (u_n) est strictement croissante.

$$c) u_n = 1,4^n$$

$$1,4 > 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1,4^n = +\infty$$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ Donc pour tout réel arbitrairement fixé, il existe un rang n tel que $u_n > A$ si $n > n_0$

Preuve $A = 10$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq 10$
 à partir duquel il existe

a) On entre dans la boucle du while, tant que la condition : $1,4^n < A$ est vérifiée.
 Le programme se termine dès lors que la condition $1,4^n < A$ n'est plus vérifiée,
 c'est à dire dès lors que $1,4^n \geq A$.
 Le programme affiche donc en sortie le plus petit entier naturel n à partir duquel : $1,4^n \geq A$.

→ Ici je choisis $A = 2,03$.

$$n = 0 : 1,4^0 < 2,03 \quad \text{vrai}$$

$$n = 1 : 1,4^1 < 2,03 \quad \text{vrai}$$

$$n = 2 : 1,4^2 < 2,03 \quad \text{vrai}$$

$$n = 3 : 1,4^3 < 2,03 \quad \text{faux}$$

On ne rentre plus dans la boucle → En sortie est l'algorithme affiche 3

b) $1,4^n \geq 10$ dès que $n = 7$

Ici, c'est à partir du rang 7, que $1,4^n$ est supérieur ou égal à 10

Ici $A = 100$: $1,4^n \geq 100$ dès que $n \geq 14$

Ici $n_0 = 14$

Ici $A = 0$, $1,4^n < 0$: Faux

On ne rentre pas dans la boucle, et le programme renvoie $n = 0$.

Cet algorithme revient quasiment tout le temps au baccalauréat, alors prenez le temps de bien le comprendre !

VI-Convergence des suites monotones

Rappel-Définitions

- Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite *majorée*, s'il existe un réel M , tel que pour tout entier naturel n , $u_n \leq M$. On dit que M est un majorant de la suite (u_n) . ♥♥
- Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite *minorée*, s'il existe un réel m , tel que pour tout entier naturel n , $u_n \geq m$. On dit que m est un minorant de la suite (u_n) . ♥♥

Toute suite à valeurs négatives est majorée par 0.

Toute suite à valeurs positives est minorée par 0.

- Une suite est dite *bornée* si elle est à la fois *minorée* et *majorée*. ♥♥

Remarque fondamentale

- Toute suite décroissante est *majorée* par son premier terme
- Toute suite croissante est *minorée* par son premier terme

Voici un théorème fondamental qui tombe systématiquement au baccalauréat :

♥♥♥♥ Théorème de convergence des suites monotones ♥♥♥♥

- 1) Si une suite est **CROISSANTE** ET **MAJORÉE**..., alors elle **CONVERGE**.
- 2) Si une suite est **DÉCROISSANTE** ET **MINORÉE**..., alors elle **CONVERGE**...

On admet ce théorème de la convergence monotone, conformément au programme.

Remarque : Ce théorème est un théorème existentiel : il permet de démontrer la convergence d'une telle suite, mais ne précise en aucun cas la valeur de la limite de cette suite.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 3 + \frac{2}{n+1}$

- a) Etablir que cette suite est minorée par 0, et qu'elle est décroissante.
- b) En déduire que la suite (u_n) converge. Déterminer la limite de cette suite.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 + \frac{2}{n+1}$$

$$a) \quad n \geq 0, \text{ donc } \frac{n+1}{2} \geq 1, \text{ donc } \frac{2}{n+1} > 0$$

$$\text{donc } 3 + \frac{2}{n+1} > 3 \geq 0$$

(u_n) est minorée par 0

$$\text{donc } u_n \geq 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_{n+1} - u_n = 3 + \frac{2}{n+2} - \left(3 + \frac{2}{n+1} \right)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2 \times (n+1)}{(n+2)(n+1)} - \frac{2(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+2 - (2n+4)}{(n+2)(n+1)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{(n+2)(n+1)}$$

b) (u_n) est décroissante et minorée par 0.

Donc d'après le théorème de convergence des suites monotones : (u_n) converge.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2 \end{array} \right\} \text{ Donc par quotient : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n+1} \right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3$$

$$\text{Donc par somme : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$$

Donc (u_n) converge vers 3

• Attention à la grosse erreur, souvent commise par les élèves au bac :

« La suite (u_n) est décroissante, et elle est minorée par 0, donc elle converge vers 0. »

Si vous ne voyez pas l'erreur dans ce raisonnement, relisez (une ou plusieurs fois) l'exemple précédent !!

Remarque même : si une suite (u_n) converge vers L , alors on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$. Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}$?

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = L$$

Exercice 1 (fondamental, le classique de bac)

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0; 3]$ par : $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$.

1) Montrer que f est croissante sur l'intervalle $[0; 3]$.

$$\forall x \in [0, 3], f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$$

$$\text{on } \begin{cases} u(x) = 3x+2 \\ v(x) = x+4 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{3(x+4) - (3x+2)}{(x+4)^2}$$

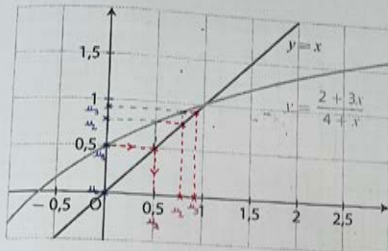
$$f'(x) = \frac{3x+12-3x-2}{(x+4)^2} = \frac{10}{(x+4)^2}$$

$$10 > 0 \text{ et } (x+4)^2 > 0 \text{ sur } [0; 3]$$

$$\text{donc } \forall x \in [0; 3], f'(x) > 0$$

$$f \text{ est croissante sur } [0; 3]$$

- 2) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$.
- a) On donne dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction f sur $[0; 3]$, ainsi que la droite d'équation : $y = x$.



$$\begin{aligned} u_1 &= f(u_0) \\ u_2 &= f(u_1) \\ u_3 &= f(u_2) \end{aligned}$$

Placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis en s'aidant de la courbe de f et de la droite d'équation $y = x$, construire géométriquement sur l'axe des abscisses u_1 , u_2 et u_3 .

b) Quelles conjectures faites-vous concernant : le sens de variation de (u_n) ? La convergence de (u_n) ?

- c) Démontrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
- d) En déduire que la suite (u_n) converge, et calculer sa limite L .

b) Par lecture : $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$

Il semblerait donc que (u_n) soit croissante

→ De plus (u_n) semble vers 1 (environ)

c) On procède par récurrence :

$n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la propriété : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

Initialisation : Montrons que $P(0)$ est vraie, c'est :

$$\text{mq : } 0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$$

$$\text{Or } u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = f(u_0) = f(0) = \frac{3 \times 0 + 2}{0 + 4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq 0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$$

Donc $P(0)$ est vraie

Récurrence : Soit n un entier naturel fixé, tel que $P(n)$ est vraie : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est : $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$ Hyp. R.

BT

Par hypothèse de récurrence : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

Donc par croissance de f sur $[0; 1]$: $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1)$

$$\text{Donc : } \rightarrow \quad 1,5 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$$

Or $0 \leq \frac{1}{2}$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$
 $P(n+1)$ est vraie

Conclusion : $P(0)$ est vraie, et $P(n)$ est héréditaire à tout ordre.
Donc d'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

d) D'après la q. précédente : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}, \text{ donc } (u_n) \text{ est croissante} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1, \text{ donc } (u_n) \text{ est majorée par } 1 \end{cases}$

Donc d'après le théorème de convergence des suites monotones : (u_n) converge

Soit L la limite de cette suite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$$

$$\text{Or } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$$

Faisons tendre n vers $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \frac{3L + 2}{L + 4}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = L$$

et par opérations sur les limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3u_n + 2}{u_n + 4} = \frac{3L + 2}{L + 4}$$

$$L = \frac{3L + 2}{L + 4}$$

$$\text{Donc } L(L + 4) = 3L + 2$$

$$\rightarrow L^2 + 4L - 2 = 0$$

$a = 1; b = 4; c = -2$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 16 - 4 \times 1 \times (-2)$$
$$= 20$$

$\Delta > 0$ donc deux solutions :

$$L_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{20}}{2} = -2$$

$$L_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{20}}{2} = 1$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n$ et (u_n) converge vers L , donc $L \geq 0$

On exclut donc -2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

EXERCICE 2

5 points

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique. Au début de l'étude la population est de 100 000 insectes.

Pour préserver l'équilibre du milieu naturelle nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de 60 % chaque mois.

En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n , u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

On a donc $u_0 = 0,1$.

- Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n = 0,1 \times 1,6^n$.
- Déterminer la limite de la suite (u_n) .
- En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n > 0,4$.
- Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé ? Justifier la réponse.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.

Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n) , définie par :

$$v_0 = 0,1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2,$$

où, pour tout entier naturel n , v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

- Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.
- On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par

$$f(x) = 1,6x - 1,6x^2.$$

a. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

b. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

PARTIE A :

u_m = nbs de millions d'insectes au bout de m mois

$$u_0 = 0,1 \quad (100\,000 = 0,1 \times 1\,000\,000)$$

① Chaque mois la population d'insectes augmente de 60 %, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1,6 u_n \quad \leftarrow \times 1,6$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,6$ de premier terme $u_0 = 0,1$

$$\text{Donc : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$$

$$u_n = 0,1 \times 1,6^n$$

$$\text{② } u_n = 0,1 \times 1,6^n$$

$$1,6 > 0; \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1,6^n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

③ à la suite de l'année : à la machine.

$$u_n > 0,4 \quad \text{dès que } n \geq 3$$

n	u_n
2	0,256
3	0,4096

→ c'est à partir du rang 3, que $u_n > 0,4$.

- (4) L'équilibre n'est pas préservé car si $n \geq 3$, $u_n > 0,4$ et préservation de l'équilibre si nb d'insectes inférieur ou égal à $0,4$ millions.

PARTIE B: $V_0 = 0,1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = 1,6V_n - 1,6V_n^2$

V_n = nb de millions d'insectes au bout de n mois.

(1) On cherche N_2 :
$$\boxed{N_2} = 1,6 \times V_0 - 1,6 \times V_0^2$$

$$n=0 = 1,6 \times 0,1 - 1,6 \times 0,1^2$$

$$= 0,16 - 0,016 = \boxed{0,144} \leftarrow \text{millions}$$

Il y a 144 000 insectes au bout d'1 mois.

(2) $x \in [0; \frac{1}{2}]$ et $f(x) = 1,6x - 1,6x^2$

a) $f(x) = x \Leftrightarrow 1,6x - 1,6x^2 = x$

$f(x) = x \Leftrightarrow 1,6x - 1,6x^2 - x = 0$

$f(x) = x \Leftrightarrow -1,6x^2 + 0,6x = 0$

$f(x) = x \Leftrightarrow x(-1,6x + 0,6) = 0 \leftarrow \text{Produit nul.}$

$f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$ ou $-1,6x + 0,6 = 0$

$f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{0,6}{1,6} = \frac{6}{16} = 0,375$

$\mathcal{P} = \{0; 0,375\}$

b) $x \in [0; \frac{1}{2}]$ et $f(x) = 1,6x - 1,6x^2$

$f'(x) = 1,6 - 3,2x$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1,6 - 3,2x \geq 0 \Leftrightarrow 1,6 \geq 3,2x$

$\boxed{f'(x) \geq 0} \Leftrightarrow 3,2x \leq 1,6 \Leftrightarrow x \leq \frac{1,6}{3,2} \Leftrightarrow \boxed{x \leq 0,5}$

Donc f croît sur $[0; \frac{1}{2}]$

(3) a) $V_0 = 0,1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = 1,6V_n - 1,6V_n^2$

$n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la propriété: $0 \leq V_n \leq V_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

Initialisation: Pour $n=0$, justifions que: $0 \leq V_0 \leq V_1 \leq \frac{1}{2}$

$V_0 = 0,1$ et $V_1 = 0,144$ (q.1 part B) $\rightarrow \frac{1}{2} = 0,5$

Or $0 \leq 0,1 \leq 0,144 \leq \frac{1}{2}$ Donc $P(0)$ est vraie.

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.
 b. Montrer que la suite (v_n) est convergente.
 On note ℓ la valeur de sa limite. On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
 c. Déterminer la valeur de ℓ .

Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé? Justifier la réponse.

Réponse: Soit n un entier naturel fixé.

→ Supposons que pour cet entier n , $P(n)$ est vraie, à savoir:

$$0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

BUT H.R

Par hypothèse de récurrence: $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

Donc par croissance de f sur $[0, \frac{1}{2}]$:

$$f(0) \leq f(v_n) \leq f(v_{n+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\rightarrow \text{Or } \forall m \in \mathbb{N}, v_{m+1} = f(v_m); \text{ donc } f(v_{m+1}) = v_{m+2}$$

$$\text{et } f(0) = 1,6 \times 0 - 1,6 \times 0^2 = 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1,6 \times 0,5 - 1,6 \times (0,5)^2 = 0,4$$

$$\text{Donc } 0 \leq v_{m+1} \leq v_{m+2} \leq 0,4$$

$$\text{Or } 0,4 \leq 0,5 \text{ donc } 0 \leq v_{m+1} \leq v_{m+2} \leq 0,5$$

Conclusion: $P(0)$ est vraie, et $P(n)$ est héréditaire à tout ordre.

$$\text{Donc } \forall m \in \mathbb{N}, 0 \leq v_m \leq v_{m+1} \leq 0,5$$

③ b) D'après q.3.a):

$$\forall m \in \mathbb{N}, v_m \leq v_{m+1}; \text{ donc } (v_m) \text{ est croissante}$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, v_m \leq \frac{1}{2}; \text{ donc } (v_m) \text{ est majorée par } \frac{1}{2}$$

Donc d'après le théorème de convergence des suites monotones, (v_n) converge.

$$\text{Soit } \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

c) ℓ est solution de $f(x) = x$

$$\text{Or d'après 1.a) Partie B, } f(x) = x \text{ a pour solution: } 0 \text{ et } 0,375$$

$$\text{Donc } \ell = 0 \text{ et } \ell = 0,375$$

$$\text{Or } (v_n) \text{ croît et } v_0 = 0,1, \text{ donc } \forall m \in \mathbb{N}, v_m \geq 0,1 \text{ donc } \ell \geq 0,1$$

$$\text{Or } 0 < 0,1 \text{ donc } \ell = 0,375; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0,375$$

Rappel: équilibre préservé si nb d'insectes ne dépasse pas 400 000

à long terme le nombre d'insectes de la réserve tend à se stabiliser à 0,375 millions

d'insectes, c'est à dire: 375 000 insectes

$$\text{Or } 375 000 < 400 000$$

Donc selon ce modèle: l'équilibre est préservé.

4. On donne ci-contre la fonction seuil, écrite en langage Python.

- a. Qu'observe-t-on si on saisit seuil(0.4)?
b. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(0.35).
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

def seuil(a):

$v = 0.1 \leftarrow V_0 = 0.1$

$n = 0$

while $v < a$: $\leftarrow$ tant que = condition : $V_n < 0$

$v = 1.6 * v - 1.6 * v * v \leftarrow V_{n+1} = 1.6 V_n - 1.6 V_n^2$

$n = n + 1$

return n

4) a) seuil(0.4) ou $a = 0.4$

La condition : while $V < 0.4$ est toujours vérifiée

car : (V_n) croît et converge vers 0,375, donc $\forall n \in \mathbb{N}, V_n < 0.375$

Donc $V < 0.4$ vraie

Le programme tourne "en boucle infinie" $\rightarrow$ seuil(0.4) ne renvoie rien.

b) Table de valeurs (V_n)

n	V_n
5	0,338
6	0,357

$\rightarrow$ Il renvoie le plus petit entier n à partir duquel : $V_n \geq 0.35$

c'est à dire le nb de mois pour que la population d'insectes soit supérieure ou égale à 350 000 individus.

2 figures

(calculatrice) seuil(0.35) renvoie en sortie : 6

$\rightarrow$ Il faut 6 mois pour que la population d'insectes soit sup ou égale à 350 000 individus.

Exercice 6 (Issu de baccalauréat)

Partie B : Étude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.

On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.

On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la **quantité de médicament dans le sang a diminué de 30% par rapport à la quantité présente immédiatement** après cette injection.

On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n , u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n -ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

- Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1 , de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.
- Justifier que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.
- Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \leq u_{n+1} < 6$.
 - En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
 - Déterminer la valeur de ℓ . Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
- On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = 6 - u_n$.

⚠️ * a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.

b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n , puis de u_n en fonction de n .

c. Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg.

u_n = quantité en mg de médicament dans le sang au bout de n heures.

$$u_0 = 2$$

$$\textcircled{1} \quad \begin{aligned} u_1 &= u_0 = \frac{30}{100} \times u_0 + 1,8 \\ u_2 &= 2 - 0,3 \times 2 + 1,8 = 3,2 \end{aligned}$$

ou avec les CM : $u_1 = 0,7 \times u_0 + 1,8$

$$CM = \frac{30}{100} = 0,3 \quad \left| \quad u_2 = 0,7 \times 2 + 1,8 = 3,2\right.$$

- $\textcircled{2}$ On diminue de 30% la quantité de u_n ce qui revient à la multiplier par $CM = 0,7$.
Puis on ajoute 1,8 mg de produit chaque heure.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 0,7 u_n + 1,8$$

- $\textcircled{3} a)$ Récurrence :

Récurrence : n un entier fixé, sq : $\underbrace{u_n \leq u_{n+1} \leq 6}_{H.R.}$
sq $P(n+1)$ est vraie, à savoir que : $\underbrace{u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 6}_{BUT}$

Donc : $0,7 u_n \leq 0,7 u_{n+1} < 4,2$

$$\underbrace{0,7 u_n + 1,8 \leq 0,7 u_{n+1} + 1,8}_{\text{BUT}}$$

$$\boxed{u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 6}$$

- $\textcircled{3} b)$ Après q.3.a) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$, donc (u_n) est croissante.
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 6$, donc (u_n) est majorée par 6.

→ Donc par théorème de convergence des suites monotones : (u_n) converge.

$$\text{Lait } l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

$$\textcircled{3} c) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 0,7 u_n + 1,8$$

Par passage à la limite : $\underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}}_l = \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,7 u_n + 1,8)$
II II (par linéarité de la limite et somme)
 $l = 0,7 l + 1,8$

$$l = 0,7 l + 1,8$$

$$1l - 0,7l = 1,8$$

$$0,3l = 1,8$$

$$l = \frac{1,8}{0,3} = 6$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6}$$

A long terme (= au bout d'un très grand nb d'heures)

la quantité de médicament tend à se stabiliser à 6 mg.

④ a) $\forall m \in \mathbb{N}, V_m = 6 - U_m$

Le premier terme de (V_m) c'est $V_0 = 6 - U_0 = 6 - 2 = 4$

Rappel : (V_m) est géométrique de raison $0,7$ (soi) $\forall m \in \mathbb{N}, V_{m+1} = 0,7 V_m$
à prouver

M1 : $V_{m+1} = 6 - U_{m+1}$

Or d'après q.2) : $U_{m+1} = 0,7 U_m + 1,8$

Donc $V_{m+1} = 6 - (0,7 U_m + 1,8)$

$V_{m+1} = 6 - 0,7 U_m - 1,8$

$V_{m+1} = 4,2 - 0,7 U_m$

on factorise par $0,7$: $V_{m+1} = 0,7 (6 - U_m) = 0,7 V_m$

M2 : $\hat{m}$ debut

Or $V_m = 6 - U_m \iff U_m = 6 - V_m$

$V_{m+1} = 4,2 - 0,7 (6 - V_m)$

$V_{m+1} = 4,2 - 4,2 + 0,7 V_m$

$V_{m+1} = 0,7 V_m$

Donc (V_m) est géométrique de raison $q = 0,7$

④ b) Or sait que (V_m) est géométrique de raison $q = 0,7$

(# cours) : $\forall m \in \mathbb{N}, V_m = V_0 \times q^m$

$V_m \in \mathbb{N}, V_m = 4 \times 0,7^m$

Or $\forall m \in \mathbb{N}, V_m = 6 - U_m$

$U_m = 6 - 4 \times 0,7^m$

Compléter l'algorithme suivant afin qu'il réponde au cahier des charges cité précédemment :
= question c)

```
def protocole():
    u=2
    n=0
    while u .....:
        u=...
        n=...
    return ...
```

Arrêt si $u \geq 5,5$. Donc le programme entre dans la boucle tant que $u < 5,5$

renvoie la durée minimale à $U_m \geq 5,5$ pour la première fois

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases} \quad n \geq 0$$

Partie A : Conjecture

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

n	0	1	2	3	4	5	10	20
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{32}$	0,04	2×10^{-3}

2. Conjecturer la limite de la suite (u_n) .

→ Il semblerait que (u_n) converge vers 0

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

1. Calculer w_0 .

$$1) \quad w_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}$$

2. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3. Pour tout entier naturel n , exprimer w_n en fonction de n .

4. Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$$

5. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Partie C : Étude de la suite (u_n)

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente sans chercher à calculer la valeur de la limite.

3. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$.

Déterminer la limite de la suite (u_n) .

$$2) \quad \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n$$

$$\text{Or } \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1}$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+2} - \frac{1}{4}u_{n+1}$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \right)$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n \Rightarrow \text{Donc } (w_n) \text{ est géométrique de raison } q = \frac{1}{2}$$

- 3) On sait que (w_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et $w_0 = \frac{1}{2}$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 \times q^n$$

$$w_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$4) w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n$$

$$\text{Donc } u_{n+1} = \underbrace{w_n}_{(4.5)} + \frac{1}{2} u_n$$

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} u_n$$

$$5) m \in \mathbb{N}, \text{ Soit } P(m) \text{ la propriété : } u_m = m \times \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

$$\text{Initialisation : Pour } m=0; u_0 = 0 = 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

(annoncé)
Donc $P(0)$ est vraie

Récurrence : Soit n un entier fixé, tel que $P(n)$ est vraie

$$\text{On suppose donc que : } u_n = n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{hypothèse de récurrence}$$

$$\text{Iq. que } P(n+1) \text{ est vraie, c'est à dire : } u_{n+1} = (n+1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

BUT

$$\text{Or d'après la question 4) } u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} u_n$$

$$\text{et d'après l'hyp. de récurrence : } u_n = n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{Donc } u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} \times n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (1+n)$$

$$u_{n+1} = (n+1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie

Conclusion : $P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à tout rang

$$\text{Donc } \boxed{\forall m \in \mathbb{N}, u_m = m \times \left(\frac{1}{2}\right)^m}$$

PARTIE C :

1) (u_n) décroît à partir du rang 1 signifie que :

$$\text{Pour } n \geq 1, u_{n+1} - u_n \leq 0$$

On pour tout entier $n \geq 1$

$$u_{n+1} - u_n \stackrel{(4.5)}{=} (n+1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$u_{n+1} - u_n = (n+1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right) - n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left((n+1) \times \frac{1}{2} - n\right)$$

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2} - n\right)$$

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2n}{2}\right)$$

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{-n}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{-n+1}{2}$$

$$u_{n+1} - u_n = (-n+1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\text{Or } \frac{1}{2} > 0 \text{ donc } \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$$

$$\text{Or } n \geq 1, \text{ donc } 0 \geq -n+1$$

$$-n+1 \leq 0$$

D'après la règle des signes d'un produit : $\underbrace{(-m+1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^m}_{\forall m \in \mathbb{N}^*, u_{m+1} - u_m \leq 0} \leq 0$
 Donc (u_n) décroît à partir du rang 1

2) D'après q. 5) : $\forall m \in \mathbb{N}, u_m = m \times \left(\frac{1}{2}\right)^m$

Or $m > 0$; $\frac{1}{2} > 0$, donc $\left(\frac{1}{2}\right)^m > 0$

$\forall m \in \mathbb{N}, u_m \geq 0$, donc (u_n) est minorée par 0

De plus (q. 1) $\square$, (u_n) décroît à partir du rang 1

Donc d'après le théorème de convergence des suites monotones , (u_n) converge

3) $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ (inconnu)

$$l = l - \frac{1}{4} l \iff 0 = l - \frac{1}{4} l$$

$$\iff l = \frac{0}{\frac{3}{4}} = 0$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Exercice 8

Trouver la bonne réponse à chaque question de ce QCM.

1.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}, u_m = e^{2n+1}$

$$u_n = e^{2n+1}$$

Donc $u_{n+1} = e^{2(n+1)+1}$
 $u_{n+1} = e^{2n+2+1}$
 $u_{n+1} = e^{2n+1+2}$
 $u_{n+1} = e^{2n+1} \times e^2$
 $= e^2 \times \underbrace{e^{2n+1}}_{u_n}$
 $= e^2 \times u_n$

La suite (u_n) est :

a. arithmétique de raison 2;

b. géométrique de raison e;

c. géométrique de raison e^2 ;

d. convergente vers e.

2.

La suite (w_n) est définie par $w_1 = 2$ et pour tout entier naturel n strictement positif,

$$w_{n+1} = \frac{1}{n} w_n.$$

$\frac{1}{n}$ n'est pas constant

$\triangleleft$ a. La suite (w_n) est géométrique

b. La suite (w_n) n'admet pas de limite

c. $w_3 = \frac{1}{15}$ avec machine

d. La suite (w_n) converge vers 0.

$\hookrightarrow$ conjecture formulée grâce à la machine

3. (La suite ci-après sert aux questions 3,4.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2} n + 1.$$

2) Par une observation immédiate, $\forall m \in \mathbb{N}^*, w_m > 0$. Donc (w_n) est minorée par 0.
 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1}{n}$; Or $n \geq 1$, donc $\frac{1}{n} \leq 1$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{w_{n+1}}{w_n} \leq 1$

Réponse (V_n) décroît

→ Donc (u_n) converge (monotone par 0 et décroît)

$$\text{Ainsi } l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{1}{n} u_n$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} u_n \right)$$

$$\text{Il } l = 0 \times l$$

$$\boxed{l = 0}$$

RÉPONSE D

Suite a. 3)

La valeur de u₂ est égale à :

a. $\frac{11}{4}$

b. $\frac{13}{2}$

b. 2,7

c. 3,5

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2} n + 1$$

$$n = 0; u_1 = \frac{1}{2} u_0 + \frac{1}{2} \times 0 + 1$$

$$\boxed{u_1} = \frac{1}{2} u_0 + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \boxed{\frac{5}{2}}$$

$$n = 1; u_2 = \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} \times 1 + 1$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{4} + \frac{3}{2} = \frac{5}{4} + \frac{6}{4} = \boxed{\frac{11}{4}}$$

4.

La suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par v_n = u_n - n est :

a. arithmétique de raison $\frac{1}{2}$

b. géométrique de raison $\frac{1}{2}$

c. constante.

d. ni arithmétique, ni géométrique.

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - n \quad \#$$

$$v_0 = u_0 - 0 = 3$$

$$v_1 = u_1 - 1 = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \times \frac{1}{2} \\ \times \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

$$v_2 = u_2 - 2 = \frac{11}{4} - 2 = \frac{3}{4} \quad \left. \begin{array}{l} \times \frac{1}{2} \\ \times \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

Il q. (v_n) est géométrique de raison q = $\frac{1}{2}$

$$\text{BUT } \forall n \in \mathbb{N}; v_{n+1} = v_n \cdot \frac{1}{2}$$

$$\# \text{ appliqué à } n+1 \text{ donne : } v_{n+1} = \underbrace{u_{n+1}}_{(*)} - (n+1) = u_{n+1} - n - 1$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2} n + 1 - n - 1$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{2} n = \frac{1}{2} (u_n - n)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$$

$$\underbrace{\quad}_{v_n}$$

5. Vrai ou faux :

Soit x donné dans $[0; 1]$. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = (x-1)e^n + \cos(n).$$

Affirmation n° 5 : La suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

$$x \in [0; 1] \text{, c'est : } 0 \leq x \leq 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (x-1)e^n + \cos(n)$$

⚠ $(\cos(n))$ diverge grossièrement

$$\rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos(n) \leq 1$$

$$\text{Donc : } (x-1)e^n - 1 \leq (x-1)e^n + \cos(n) \leq (x-1)e^n + 1 \quad \left. \vphantom{\text{Donc : }} \right\} + (x-1)e^n$$

$$(x-1)e^n - 1 \leq u_n \leq (x-1)e^n + 1$$

$$\text{Donc : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq (x-1)e^n + 1 \quad (*)$$

$$\text{Or } e > 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$$

$$\text{Or } 0 \leq x \leq 1, \text{ donc } x-1 \leq 0$$

Donc par limite de la somme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x-1)e^n = -\infty$$

Donc par somme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ((x-1)e^n + 1) = -\infty \quad (**)$$

⊗ et ⊗ : D'après le théorème de comparaison des limites on a :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty} ; u_n \text{ diverge vers } -\infty$$

AS VRAIE

Exercice 9

Marie Skłodowska-Curie (1867 - 1934) est une physicienne (mais aussi chimiste et mathématicienne), polonaise naturalisée française.

Deux Prix Nobel lui ont été décernés : un en Physique (partagé avec son mari et Henri Becquerel) en 1903 et un en Chimie en 1911 pour la découverte de deux nouveaux éléments, le polonium (nom donné en hommage à ses origines) et le radium.

On décide d'étudier le rayonnement radioactif du polonium lors de la désintégration des noyaux atomiques au cours du temps.

Au début de l'expérience, on dispose d'un morceau de 2 g de polonium.

On sait que 1 g de polonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques.

On admet que, au bout de 24 heures, 0,5% des noyaux se sont désintégrés et que, pour compenser cette disparition, on ajoute alors 0,005 g de polonium.

On modélise la situation à l'aide d'une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$; on note v_0 le nombre de noyaux contenus dans le polonium au début de l'expérience.

Pour $n \geq 1$, v_n désigne le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours écoulés.

v_0 = nbr de noyaux au début

$n \geq 1$: v_n = nbr de noyaux au bout de n jours

1. a. Vérifier que $v_0 = 6 \times 10^{21}$.
b. Expliquer que, pour tout nombre entier naturel n , on a

$$v_{n+1} = 0,995v_n + 1,5 \times 10^{19}.$$

2. a. Démontrer, par récurrence sur n , que $0 \leq v_{n+1} \leq v_n$.
b. En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
3. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n , par :

$$u_n = v_n - 3 \times 10^{21}.$$

- a. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 0,995.
- b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $v_n = 3 \times 10^{21} (0,995^n + 1)$.
- c. En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4.

On souhaite disposer de la liste des termes de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour cela, on utilise une fonction appelée `noyaux` programmée en langage Python et retranscrite partiellement ci-après.

b) On tape `noyaux(364)` afin d'afficher le relevé voulu.

`noyaux(m)` doit renvoyer les relevés quotidiens du nb de noyaux pour 52 sem.

$$\frac{7 \times 52}{364} = \text{nb jours 52 sem}$$

```
1 def noyaux(n):
```

```
2     V = 6*10**21 ← V0
```

```
3     L = [V] ← stocke dans L la variable V
```

```
4     for k in range(n): ← répète n fois l'action suivante
```

```
5         V = 0.995 * V + 1.5 * 10**19
```

```
6         L.append(V)
```

```
7     return L
```

- a. À la lecture des questions précédentes, proposer deux solutions différentes pour compléter la ligne 5 de la fonction `noyaux` afin qu'elle réponde au problème.
- b. Pour quelle valeur de l'entier n la commande `noyaux(n)` renverra-t-elle les relevés quotidiens du nombre de noyaux contenus dans l'échantillon de polonium pendant 52 semaines d'étude?

1) a) 1g de P $\rightarrow 3 \times 10^{24}$ noyaux

Donc dans 2g de P, il y a : $2 \times 3 \times 10^{24} = 6 \times 10^{24}$ noyaux

1) b) $\forall m \in \mathbb{N}, v_{m+1} = 0,995 v_m + 1,5 \times 10^{19}$

Chaque jour le nb de noyaux diminue de 0,5% donc ce dernier est multiplié par $CM = 1 - \frac{0,5}{100} = 0,995$

Donc $v_{m+1} = 0,995 v_m + \underbrace{0,005 \times 3 \times 10^{24}}_{\text{nb de noyaux de P dans 0,005g de P.}}$

$$v_{m+1} = 0,995 v_m + 5 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{24}$$

$$v_{m+1} = 0,995 v_m + 15 \times 10^{18}$$

$$v_{m+1} = 0,995 v_m + 1,5 \times 10 \times 10^{18}$$

$$v_{m+1} = 0,995 v_m + 1,5 \times 10^{19}$$

2) a) $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la propriété : $0 \leq V_{n+1} \leq V_n$

Initialisation : $\forall n, 0 \leq V_1 \leq V_0$

$$\text{Or } V_0 = 6 \times 10^{24}$$

$$\text{et } V_1 = \underset{2 \cdot 10^9}{0,995 V_0 + 1,5 \times 10^{19}}$$

$$V_1 = (0,995 \times 6 \times 10^{24} + 1,5 \times 10^{19})$$

$$V_1 = 5,985 \times 10^{24} \stackrel{\text{machine}}{<} 6 \times 10^{24}$$

Donc : $\boxed{0 \leq V_1 \leq V_0}$ $P(0)$ est vraie

Hérédité : Soit n un entier fixé, tel que $P(n)$ vraie : $\underbrace{0 \leq V_{n+1} \leq V_n}_{\text{H.P.}}$

$\forall n, \underbrace{0 \leq V_{n+2} \leq V_{n+1}}_{\text{BUT}}$

Par hypothèse de récurrence : $0 \leq V_{n+1} \leq V_n$

$$0 \times 0,995 \leq 0,995 V_{n+1} \leq 0,995 V_n$$

$$0 \leq 0,995 V_{n+1} \leq 0,995 V_n$$

$$1,5 \times 10^{19} \leq \underbrace{0,995 V_{n+1} + 1,5 \times 10^{19}}_{\text{II}} \leq \underbrace{0,995 V_n + 1,5 \times 10^{19}}_{\text{II}}$$

$$0 \leq 1,5 \times 10^{19} \leq V_{n+2} \leq V_{n+1}$$

Donc : $0 \leq V_{n+2} \leq V_{n+1}$: $P(n+1)$ est vraie

Conclusion : $P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à tout ordre

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq V_{n+1} \leq V_n}$

2) b) D'après q. 2) a) :

*) $\forall n \in \mathbb{N}, V_n \geq 0$: donc la suite V_n est minorée par 0

**) $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} \leq V_n$, donc (V_n) est décroissante

Donc (V_n) converge en tant que suite décroissante et minorée.

3) a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = V_n - 3 \times 10^{24}$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,995 u_n$

$$\text{Or } u_{n+1} = V_{n+1} - 3 \times 10^{24} \quad \text{et } V_{n+1} = 0,995 V_n + 1,5 \times 10^{19}$$

$$\text{Donc } u_{n+1} = 0,995 V_n + 1,5 \times 10^{19} - 3 \times 10^{24}$$

$$\text{Or } u_n = V_n - 3 \times 10^{24}, \text{ donc } V_n = u_n + 3 \times 10^{24}$$

$$\text{Donc } u_{n+1} = 0,995(u_n + 3 \times 10^{24}) + 1,5 \times 10^{19} - 3,0 \times 10^{24}$$

$$u_{n+1} = 0,995 u_n + \underbrace{0,995 \times 3 \times 10^{24} + 1,5 \times 10^{19} - 3,0 \times 10^{24}}_{= 0 \text{ (machine)}}$$

$$\text{Donc } u_{n+1} = 0,995 u_n$$

Donc (u_n) est géométrique de raison $q = 0,995$

3) b) D'après 3) a) (u_n) est géométrique de raison $q = 0,995$

$$\text{et } u_0 = N_0 - 3 \times 10^{24} \stackrel{q(1)a)}{=} 6 \times 10^{24} - 3 \times 10^{24} = 3 \times 10^{24}$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$$

$$u_n = 3 \times 10^{24} \times 0,995^n$$

$$\text{Enfin comme } N_n = u_n + 3 \times 10^{24}$$

$$N_n = 3 \times 10^{24} \times 0,995^n + 3 \times 10^{24}$$

$$N_n = 3 \times 10^{24} (0,995^n + 1)$$

3) c) N_n = nb de noyaux de Polonium au bout de n jours

$$-1 < 0,995 < 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,995^n = 0$$

$$\text{Donc par limite de somme et produit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times 10^{24} (0,995^n + 1) = 3 \times 10^{24}$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} N_n = 3,0 \times 10^{24}}$$

→ à long terme le nombre de noyaux de polonium tend à se stabiliser à 3×10^{24} .

Bonus :

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = 0, \underbrace{444 \dots 4}_n$

Etudier la limite de la suite (u_n) .

$$u_1 = 0,4$$

$$u_2 = 0,44$$

$$u_3 = 0,444$$

$$u_4 = 0,4444$$