

Chapitre II

Rappels sur les suites - Raisonnement par récurrence

I - Généralités et quelques rappels

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; \dots\}$

Cet ensemble contient une infinité d'éléments.

Si n désigne un entier naturel, l'entier $n+1$ est appelé le successeur de n .

Enfin, on note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble formé par les entiers naturels non nuls : $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \dots\}$.

1. Définition

- On appelle suite numérique, toute fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) et à valeurs réelles.

Notant U une telle fonction, on a : $U : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto U(n)$.

Par commodité, et surtout, pour la distinguer d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, on notera U_n [lire u indice n] à la place de $U(n)$.

- On a donc, par convention d'écriture, $U_n = U(n)$.
- A présent, la suite $U : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sera notée $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou encore, (U_n) .

$$n \mapsto U_n$$

Lorsqu'on note (U_n) on parle de la suite dans sa globalité, c'est-à-dire de l'ensemble de tous ses termes !

- Le nombre U_n est appelé le terme général de la suite.
- U_{n+1} est appelé le terme successeur à U_n . S'il existe, U_n est appelé le prédécesseur de U_{n+1} .

⚠ Bien faire attention, que si une suite est définie sur $\mathbb{N}$, son premier terme est U_0 et pas U_1 ! ⚠
 premier entier naturel $\rightarrow 0$

2. Mode de génération d'une suite

Pour définir une suite il existe plusieurs moyens :

- Il y a les suites définies explicitement, c'est-à-dire que l'on connaît l'expression de U_n en fonction de n .

Par exemple, la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = n^2 - n + 1$ est définie explicitement.

La phrase (U_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = n^2 - n + 1$ signifie que pour tout entier naturel n , on a : $U_n = n^2 - n + 1$.

Calculer les trois premiers termes de cette suite :

Le premier terme de (U_n) est U_0

$$\hookrightarrow U_0 = 0^2 - 0 + 1 = 1$$

$$\text{2ème terme } U_1 = 1^2 - 1 + 1 = 1$$

$$\text{3ème terme } U_2 = 2^2 - 2 + 1 = 3$$

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= (n+1)^2 - (n+1) + 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 1 \\ &= n^2 + n + 1 \end{aligned}$$

L'avantage des suites définies explicitement, c'est que l'on peut calculer directement U_n importe quel terme de cette dernière.

Par exemple, prenons la suite précédente (U_n) définie, pour tout entier naturel n , par : $U_n = n^2 - n + 1$.

Fonction en Python pour calculer U_n dans le cas de cette suite :

```
def U(n):
    return n**2 - n + 1
```

- Il y a les suites définies par une relation de récurrence, c'est-à-dire que l'énoncé donne une égalité entre chaque terme U_n et son (ses) successeur(s) U_{n+1} , pour tout entier naturel n .

Par exemple, les suites (U_n), (V_n) et (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = 2U_n - 4 \end{cases} ; \begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = V_n - 3n + (-1)^n \end{cases} ; \begin{cases} W_0 = 0 ; W_1 = 1 \\ W_{n+2} = W_{n+1} + W_n \end{cases} \text{ sont trois exemples de suites définies par une relation de récurrence.}$$

a) Déterminer les trois premiers termes de chacune des suites (U_n) et (V_n). a) $U_0 = 5$: premier terme de (U_n)

b) Déterminer les cinq premiers termes de la suite (W_n), appelée suite de Fibonacci. $U_1 = 2 \times 5 - 4 = 2 \times 5 - 4 = 6$: second terme

suite a) $V_0 = 2$

$$V_1 = V_0 - 3 \times 0 + (-1)^0 = 2 - 3 \times 0 + 1 = 3$$

$$V_2 = V_1 - 3 \times 1 + (-1)^1 = 3 - 3 \times 1 + (-1)^1 = -1$$

$$V_3 = V_2 - 3 \times 2 + (-1)^2 = -1 - 3 \times 2 + (-1)^2 = -6$$

Remarque : pour des suites définies par une relation de récurrence, le calcul des termes de la suite se fait, a priori, de proche en proche, à partir du (des) premier(s) terme(s).

Dans l'exemple précédent, il serait très inconfortable de calculer U_{2022} . Pourquoi ?

Car nécessité de calculer tous les termes $U_1 ; U_2 ; U_3 ; \dots ; U_{2022}$

Utilisation des calculatrices concernant les suites : se référer au document ci-dessous (notice de la calculatrice NUMWORKS et TI sur mon site) pour NUMWORKS, voici un résumé page ci-après : Ceci doit impérativement être maîtrisé par chacun d'entre vous, cela sert souvent en exercice pour établir une conjecture par exemple.

b) $W_0 = 0 ; W_1 = 1$

$$n=0 \quad W_2 = W_1 + W_0 = 1 + 0 = 1$$

$$n=1 \quad W_3 = W_2 + W_1 = 1 + 1 = 2$$

$$n=2 \quad W_4 = W_3 + W_2 = 2 + 1 = 3$$

4. Suites

Choisir le menu puis sélectionner

Ajouter une suite et .

a. Entrer une suite

Suite définie par une formule explicite :

Choisir le type de suite u_n .

Entrer l'expression de la suite en utilisant la touche pour écrire la variable n puis appuyer sur .

Exemple 1 :

Suites	Formule	Tableau
u_n	$2 - n + 1$	

Suite définie par récurrence :

Choisir le type de suite u_{n+1} .

Entrer l'expression de la suite en utilisant pour écrire u_n puis écrire la valeur de u_0 et appuyer sur .

Exemple 2 :

Suites	Formule	Tableau
u_{n+1}	$2 u_n + 1$	
u_0	1	

b. Calculer les termes

Avec les flèches, sélectionner le menu puis le menu et choisir le début, la fin et le pas de la table.

Sélectionner pour afficher le tableau de valeurs.

n début	0
n fin	10
Pas	1

Exemple 1 :

n	u_n
0	1
1	1
2	3
3	7
4	13
5	21

Exemple 2 :

n	u_n
0	1
1	3
2	7
3	15
4	31
5	63

Calcul des termes d'une suite définie par une relation de récurrence :

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -3u_n + 7 \end{cases}$ dont on veut déterminer les termes u_1 à u_{15} .

Donner ces valeurs sous forme de tableau.

n	u_n (arrondi)
0	2
1	1
2	4
3	-5
4	22
5	-59
6	184
7	-545

n
... 15

Ce tableau donné par la calculatrice, permet, par exemple, de constater que les valeurs prises par cette suite ne sont pas toutes de même signe, et même en alternance de signe, dès que $n \geq 2$.

Essayez d'afficher à l'écran les termes de la suite (W_n) de Fibonacci précédemment décrite.

3- Monotonie d'une suite

Définition

- ♥ Une suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite croissante lorsque pour tout entier naturel n , on a : $U_n \leq U_{n+1}$ (ou $U_{n+1} \geq U_n$)
- ♥ Une suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite décroissante lorsque pour tout entier naturel n , on a : $U_n \geq U_{n+1}$ (ou $U_{n+1} \leq U_n$)
- ♥ Une suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite constante (ou stationnaire) lorsque pour tout entier naturel n , on a : $U_n = U_{n+1}$ ou encore $U_n = U_0$

Remarque : On dira qu'une suite est monotone, dès lors qu'elle est croissante ou bien décroissante.

Ces définitions sont adaptables avec la nuance suivante : par exemple, une suite (U_n) est dite croissante à partir du rang 2, si pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a : $U_{n+1} \geq U_n$.

Terminons les remarques en disant qu'écrire : " $U_n \geq U_{n+1}$, donc la suite (U_n) décroît" n'a aucun sens !!!

Le quantificateur : pour tout entier naturel n que l'on notera : $\forall n \in \mathbb{N}$, prend ici toute son importance : écrire : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq U_{n+1}$ a un sens, et signifie très exactement que la suite (U_n) est décroissante !

Un autre quantificateur est aussi utilisé en mathématiques : il existe (au moins) un entier naturel n que l'on notera : $\exists n \in \mathbb{N}$.

Par exemple, l'affirmation : $\exists n \in \mathbb{N} / U_n < 0$ signifie que la suite (U_n) a au moins un de ses termes qui est strictement négatif.

Les deux affirmations : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n < 0$ et $\exists n \in \mathbb{N} / U_n < 0$ n'ont pas du tout le même sens : pourquoi ?

$\approx$ tous $\odot$

$\approx$ au moins 1 $\odot$

On prendra bien garde à ne pas mélanger la rédaction en français et celle utilisant les quantificateurs.

Ecrire : $\forall$ l'entier naturel n , $\exists$ un réel x tel que $x > n$ est un salmigondis qui n'a aucun sens !

Voici plusieurs méthodes qui permettent d'étudier le sens de variation d'une suite :

♥♥ Méthode de la différence ♥♥ : (la plus utilisée en pratique pour le bac)

On étudie le signe de $U_{n+1} - U_n$:
 Plus précisément : Si $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n \geq 0$, alors (U_n) est croissante.
 Si $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n \leq 0$, alors (U_n) est décroissante.

Exercice 1

Etudier le sens de variation (= la monotonie) des suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_n = n^2 + 4n + 1 \quad ; \quad V_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

Exercice 1

Etudier le sens de variation (= la monotonie) des suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_n = n^2 + 4n + 1 \quad ; \quad V_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = n^2 + 4n + 1$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } U_{n+1} &= (n+1)^2 + 4(n+1) + 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 + 4n + 4 + 1 \\ &= n^2 + 6n + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } U_{n+1} - U_n &= n^2 + 6n + 6 - (n^2 + 4n + 1) \\ &= n^2 + 6n + 6 - n^2 - 4n - 1 \\ &= 2n + 5 \end{aligned}$$

Or $n \in \mathbb{N}$, donc $n \geq 0$, $2 > 0$,

$5 > 0$ donc $2n + 5 > 0$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n > 0$

Donc (U_n) est croissante

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } V_{n+1} - V_n &= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n+1}{(n+3)(n+1)} - \frac{n+3}{(n+3)(n+1)} \\ &= \frac{n+1 - n-3}{(n+3)(n+1)} = \frac{-2}{(n+3)(n+1)} \end{aligned}$$

Or, $-2 < 0$, $n \in \mathbb{N}$, donc $n \geq 0$, donc $n+3 \geq 3 > 0$ et $n+1 > 0$

D'après la règle des signes : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{-2}{(n+3)(n+1)} < 0$, donc $V_{n+1} - V_n < 0$

$\Rightarrow (V_n)$ décroît

Cas particuliers des suites dont tous les termes sont strictement positifs

Méthode des quotients : 6^e ne concerne que les suites dont tous les termes sont strictement positifs.

⚠ Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors (u_n) est croissante.
 Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors (u_n) est décroissante.

Exemple 1

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n , par : $u_n = 2 \times 0,4^n$.

Exemple 2 : (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{2^n}{n}$
 a) Justifier que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n > 0$.

b) Vérifier que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n}{n+1}$.

c) Comparer les entiers $2n$ et $n+1$, puis en déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Ex 1 : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \times 0,4^n$

$2 > 0$; $0,4 > 0$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, 0,4^n > 0$, donc $u_n > 0$

$$\text{On a : } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2 \times 0,4^{n+1}}{2 \times 0,4^n} = \frac{0,4^{n+1}}{0,4^n} = 0,4^{n+1-n} = 0,4$$

Or $0,4 \leq 1$

$$\text{Donc, } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$$

Donc (u_n) décroît

Ex 2

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2^n}{n}$$

a) Soit $n \geq 1$: $2^n > 0$ et $n > 0$

Donc par règle des signes d'un quotient : $u_n > 0$

$$b) n \geq 1 : u_n = \frac{2^n}{n}, \text{ donc } u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$$

$$\text{Donc } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \times \frac{n}{n+1} = 2 \times \frac{n}{n+1} = \frac{2n}{n+1}$$

c) Pour comparer 2 réels a et b on étudie le signe de $a-b$

$$\text{Ici : } 2n - (n+1) = 2n - n - 1 = n - 1$$

Or $n \in \mathbb{N}^*$, donc $n \geq 1$, donc $n-1 \geq 0$ par suite : $2n - (n+1) \geq 0$

$$\text{donc } \frac{2n}{n+1} \geq 1$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, donc (u_n) est croissante.

⚠ : La méthode des quotients n'est applicable qu'à des suites dont tous les termes sont strictement positifs. Il vous faudra systématiquement, si vous voulez utiliser cette méthode, vérifier ce dernier point !

Propriété (méthode de l'étude d'une fonction pour les suites explicitement définies).

Si une suite est définie de façon explicite, par : pour tout entier naturel n , $u_n = f(n)$ où f est une fonction, et si f est monotone sur $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) a même sens de variation que f .

Illustration et preuve :

Ex: si f est croissante sur $[0; +\infty[$



$$u_n = f(n)$$

Preuve : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq n \leq n+1$

Donc $f(0) \leq f(n) \leq f(n+1)$ car f croît sur $[0; +\infty[$

Donc $u_n \leq u_{n+1}$, donc u_n croît.

Exemple 1

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = e^{4n^2} + n^3 + 3n^2 + 5n + 2025$.

a) Etablir que pour tout entier naturel n , $U_n = f(n)$, où f est une fonction que l'on précisera.

b) Etudier le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$, puis en déduire le sens de variation de la suite (U_n) .

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \overbrace{e^{4n^2} + n^3 + 3n^2 + 5n + 2025}^{f(n)}$$

a) $U_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^{4x^2} + x^3 + 3x^2 + 5x + 2025$$

$$b) f'(x) = 8xe^{4x^2} + 3x^2 + 6x + 5$$

$$\text{Or } x \geq 0, \text{ donc } 8x \geq 0 \text{ et } e^{4x^2} > 0, 3x^2 \geq 0$$

$$6x \geq 0$$

$$5 > 0$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ par somme de produit d'expression } \oplus$$

Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$

Par propriété : $u_n = f(n)$ et f croît sur $[0; +\infty[$

Exemple 2

Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = e^n - n$.

Etudier le sens de variation de la suite (V_n) .

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = e^n - n$$

$V_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^x - x$$

$$f'(x) = e^x - 1$$

$$\text{Or } x \geq 0 \text{ donc } e^x \geq e^0 \text{ car exp. croît sur } [0; +\infty[, \text{ donc } e^x \geq 1$$

$$e^x - 1 \geq 0$$

$$f'(x) \geq 0$$

Donc f croît sur $[0; +\infty[$

Par propriété (V_n) est croissante.

Remarque : Attention, la propriété précédente est fautive pour les suites définies par une relation de récurrence : si pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, (u_n) n'a pas nécessairement le même sens de variation que f sur $[0; +\infty[$.

En témoigne le contre-exemple suivant : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - 4$.

Etablir que la suite (u_n) décroît, bien que : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f croissante sur $[0; +\infty[$. Conclusion ?

$$\hookrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 4$$

$$u_{n+1} - u_n = -4 < 0 \text{ donc } (u_n) \text{ décroît}$$

$$u_{n+1} = u_n - 1 = f(u_n)$$

où f est définie sur $[0; +\infty[$ par

$$\begin{aligned} f(x) &= x - 1 \\ f'(x) &= 1 (> 0) \end{aligned}$$

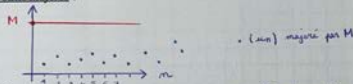
Donc f croît sur $[0; +\infty[$

Terminons ce paragraphe par quelques définitions.

Définitions

- $\forall \forall$ Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite majorée, s'il existe un réel M , tel que pour tout entier naturel n , $u_n \leq M$. On dit que M est un majorant de la suite (u_n) . $\forall \forall$
 = ceux des bornes sont plus petit que M $\nearrow$ indépendant de n
 $\rightarrow$ quantité fixe !! = pas variable $\neq$ variable on ne peut pas dire qu'elle est majorée

Illustration graphique de suite majorée :



Exemple de suite majorée :

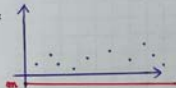
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$$

$$(-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

• Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1$
 • donc (u_n) est majorée par 1
 $\rightarrow$ elle est aussi majorée par tout nombre > 1

- $\forall \forall$ Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite minorée, s'il existe un réel m , tel que pour tout entier naturel n , $u_n \geq m$. On dit que m est un minorant de la suite (u_n) . $\forall \forall$

Illustration graphique de suite minorée :

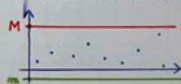


Exemple de suite minorée :

$$u_n = (-1)^n : (u_n) \text{ est minorée par } -1 \text{ car } : \forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n \geq -1$$

- Une suite est dite bornée si elle est à la fois minorée et majorée. $\forall \forall$

Illustration graphique de suite bornée :



Exemple de suite bornée :

$$u_n = (-1)^n$$

Remarque : un majorant, un minorant, est une constante indépendante de n .

Exemple de suite bornée :

$$u_n = (-1)^n.$$



Remarques : un majorant, un minorant, est une constante indépendante de n .

Ne pas dire : le majorant ou le minorant, pourquoi ?

$\forall n \in \mathbb{N}, m \geq$ Si tous les termes d'une suite sont positifs, alors cette suite est minorée par 0.....
 $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq$ Si tous les termes d'une suite sont négatifs, alors cette suite est majorée par 0.....

II - Le raisonnement par récurrence

Définition

Une propriété mathématique est une phrase écrite en français ou à l'aide de symboles mathématiques, qui est soit vraie soit fausse.

Lorsque cette propriété concerne un entier naturel n , on la notera $\mathcal{P}(n)$, ou encore $\mathcal{P}_n$.
 n est appelé le rang, $\mathcal{P}(n)$ signifie la propriété au rang n .

Exemple

1) Soit n un entier naturel.

$P(n)$ est la propriété : $2^n > n^2$. (Ici, $P(n)$ est décrite à l'aide de symboles mathématiques).

Cette propriété est-elle vraie ou fausse au rang $n=0$? Au rang $n=1$? Au rang $n=2$?

- ✓ Pour $n=0$, $P(0)$ est la propriété : $2^0 > 0^2$ c'est à dire $1 > 0$: vrai! $P(0)$ est vraie
 - ✓ Pour $n=1$, $P(1)$ est la propriété : $2^1 > 1^2$ c'est à dire $2 > 1$: vrai! $P(1)$ est vraie
 - ✓ Pour $n=2$, $P(2)$ est la propriété : $2^2 > 2^2$ c'est à dire $4 > 4$: faux! $P(2)$ est fautive
- 2) Soit n un entier naturel et $H(n)$ la propriété : $4^n - 1$ est un multiple de 3.
(Ici, $H(n)$ est décrite à l'aide d'une phrase en français).

Cette propriété est-elle vraie ou fausse au rang : $n=0$? $n=1$? $n=2$? $n=3$? $n=4$?

Pour $H(0)$: $4^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, 0 est multiple de 3 car $3 \times 0 = 3$, Donc $H(0)$ est vraie

Pour $H(1)$: $4^1 - 1 = 3$, 3 est multiple de 3, Donc $H(1)$ est vraie

Pour $H(2)$: $4^2 - 1 = 15$, 15 multiple de 3 car $3 \times 5 = 15$, Donc $H(2)$ est vraie

Quelle conjecture a-t-on envie d'émettre ?

• Il semblerait que $H(n)$ soit vraie pour tout entier naturel n .

Que signifierait concrètement que la propriété H soit vraie au rang $n+1$?

• $H(n+1)$: $4^{n+1} - 1$ est un multiple de 3

Soit A un sous-ensemble (= une partie) de $\mathbb{N}$ tel que : $\left[\begin{array}{l} 0 \in A \\ \forall a \in A, a+1 \in A \end{array} \right.$ c'est-à-dire que le nombre 0 appartient à l'ensemble A , et que, chaque fois qu'un entier a appartient à A , le successeur de l'entier a , à savoir $a+1$, appartient également à l'ensemble A . #

Déterminer quel est l'ensemble A .

$$A = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ Donc } A = \mathbb{N}$$

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n . On suppose que : $P(0)$ est vraie, et que pour tout entier naturel n , si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est également vraie.

Que pouvez-vous dire concernant la propriété $P(n)$? Pourquoi ?

$P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Et que
 $\hookrightarrow A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ est vraie}\}$

• #, $A = \mathbb{N}$
Donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Un principe de récurrence

$P(0)$ est vraie, donc $0 \in A$

$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ vraie} \Rightarrow P(n+1) \text{ vraie}$ donc si $n \in A$, alors $n+1 \in A$

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n , et n_0 un entier naturel fixé.

$\hookrightarrow$ on termine $n_0 = 0$

Pour démontrer que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, la propriété $P(n)$ est vraie, on procèdera en trois étapes :

1) **Etape d'initialisation** : On vérifie que la propriété est vraie pour l'entier n_0 , c'est-à-dire on montre que $P(n_0)$ est vraie.

2) **Etape d'hérédité** : On suppose que la propriété est vraie à un certain rang n *arbitrairement fixé*, avec $n \geq n_0$ [c'est l'hypothèse de récurrence] et on démontre alors, sous cette hypothèse, que la propriété est également vraie au rang $n+1$.

3) **Conclusion** : Lorsqu'on a démontré qu'une propriété $P(n)$ est initialisée et héréditaire, alors on peut conclure que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier supérieur ou égal à n_0 .

Remarques : 1) Le plus souvent, en terminale, $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$.

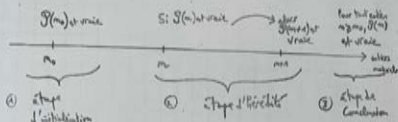
2) L'étape 2) traduit le fait que la propriété $P(n)$ est héréditaire, c'est-à-dire que la véracité (= caractère vrai) de $P(n)$ se transmet à $P(n+1)$.

3) La pratique de ces deux étapes et de la conclusion s'appelle effectuer un raisonnement par récurrence.

4) Une propriété à démontrer par récurrence s'exprime à l'aide d'une phrase, ou à l'aide d'une égalité ou inégalité, ou encadrement....

5) Les anglais appellent ce raisonnement « induction », c'est beaucoup plus parlant !

Schéma récapitulatif du principe du raisonnement par récurrence :



Le raisonnement par récurrence permet donc de démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un rang n_0 donné par l'énoncé.

Voyons différents exemples d'utilisation du raisonnement par récurrence :

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$.

1) En effectuant un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

2) En déduire le sens de variation de cette suite.

1) $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la propriété :

Étape d'initialisation :

Montrons que $P(0)$ est vraie, c'est à dire justifier que : $u_0 > 0$

Or $u_0 = 2$ (énoncé) et $2 > 0$

Donc $u_0 > 0$, donc $P(0)$ est vraie

Étape d'hérédité : Soit n un entier naturel arbitrairement fixé.

Supposons que pour cet entier là, $P(n)$ soit vraie

c'est à dire on suppose que : $u_n > 0$ Hypothèse de récurrence

Montrons alors que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire que : $u_{n+1} > 0$ BUT

Par hypothèse de récurrence : $u_n > 0$

Donc $u_{n+1} > 1 > 0$

D'après règle des signes $\frac{u_n}{u_n + 1} > 0 \Rightarrow$

Or d'après énoncé, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$, donc $u_{n+1} > 0$:
 $P(n+1)$ est vraie

Conclusion : $P(0)$ est vraie et pour tout entier naturel n , $P(n)$ est héréditaire.

Donc d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$$

Tous les termes de (U_n) sont strictement positifs.

2) D'après q.1 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$

Utilisons la méthode des quotients :

$$a = \frac{b}{c} \quad a = \frac{1}{\frac{c}{b}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} ; U_{n+1}$$

$$\text{Donc } \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{U_{n+1}}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$, donc $U_{n+1} > 1$

donc $\frac{1}{U_{n+1}} < \frac{1}{1}$ car la fonction inverse décroît sur $]0, +\infty[$

||

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1 \quad \text{Donc } (U_n) \text{ décroît}$$

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 5u_n - 4$ (*)

Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n = 2 \times 5^n + 1$.

Modèle de rédaction :

Soit $P(n)$ la propriété : $u_n = 2 \times 5^n + 1$, où $n \in \mathbb{N}$.

1^{re} étape : Initialisation : on doit vérifier que $P(0)$ est vraie c'est-à-dire que : $u_0 = 2 \times 5^0 + 1$.

Or, par donnée, $u_0 = 3$, et $2 \times 5^0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$, donc on a bien $u_0 = 2 \times 5^0 + 1$.

Ainsi $P(0)$ est vraie.

2^e étape : hérédité : $\left| \begin{array}{l} \text{Soit } n \text{ un entier naturel} \\ \text{donné, supposons } P(n) \text{ vraie, c'est-à-dire que :} \end{array} \right|$

$$\underline{u_n = 2 \times 5^n + 1}$$

hypothèse de récurrence

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que : $u_{n+1} = 2 \times 5^{n+1} + 1$.

Or, $u_{n+1} = 5u_n - 4$ [d'après l'énoncé (*)], et d'après l'hypothèse de récurrence, $u_n = 2 \times 5^n + 1$.

Donc, on a : $u_{n+1} = 5(2 \times 5^n + 1) - 4 = 2 \times 5^{n+1} + 5 - 4 = 2 \times 5^{n+1} + 1$.

$$5 \times 5^n = 5^{n+1}$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : La propriété $P(n)$ est vraie pour $n = 0$; de plus elle est héréditaire pour tout entier naturel n , donc d'après le principe de récurrence, on a bien pour tout entier naturel n , $u_n = 2 \times 5^n + 1$.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$, et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$.

a) Calculer u_1, u_2 sous forme de fraction irréductible.

b) À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant, les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$

c) Faire une conjecture sur l'expression explicite de u_n en fonction de n .

d) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que cette conjecture est vraie pour tout entier naturel n .

a) $u_0 = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} \quad (*)$

(*) avec $n=0$ conduit à : $\boxed{u_1} = \frac{1}{2-u_0} = \frac{1}{2-0} = \boxed{\frac{1}{2}}$

avec $n=1$ conduit à : $\boxed{u_2} = \frac{1}{2-u_1} = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{4-1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \boxed{\frac{2}{3}}$

c) Il semblerait que pour tout entier naturel n , on ait $u_n = \frac{n}{n+1}$

d) $\forall n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la propriété suivante : $u_n = \frac{n}{n+1}$

Étape d'initialisation :

Pour $n=0$, on trouve que $u_0 = \frac{0}{0+1} = 0$

Or énoncé) $u_0 = 0$, donc $P(0)$ est vraie

Étape d'hérédité :

Soit n un entier (naturel) fixé

Supposons que pour cet entier là, $P(n)$ soit vraie, c'est à dire, on suppose que : $u_n = \frac{n}{n+1}$

Montrons alors que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire, montrons que :

$u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$
BUT

Or d'après l'énoncé : $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$

et par hypothèse de récurrence : $u_n = \frac{n}{n+1}$

Donc : $u_{n+1} = \frac{1}{2-\frac{n}{n+1}}$

$u_{n+1} = \frac{1}{\frac{2}{1} - \frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{2(n+1) - n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$

$u_{n+1} = \frac{1}{\frac{2+n+1}{n+1}} = \frac{1}{\frac{n+3}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$

Donc $P(n+1)$ est vraie

Conclusion : $P(0)$ est vraie

$\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est héréditaire.

Donc d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie
càd $u_n = \frac{n}{n+1}$

Exercice 1 (Un très grand classique de bac, à maîtriser parfaitement.)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ la suite définie par : $u_0 = 1000$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,4u_n + 480$.

1a) En raisonnant par récurrence, démontrer que la suite (u_n) est minorée par 800. $\hookrightarrow u_{n+1} = 0,4u_n + 480$

1b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

2) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer directement, sans utiliser la question 1), que la suite (u_n) décroît.

$$u_0 = 1000 \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,4u_n + 480$$

1) a) (u_n) est minorée par 800 signifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{u_n \geq 800}_{(\text{à prouver})}$$

Soit $P(n)$ la propriété $u_n \geq 800$

Étape d'initialisation

$$\text{Pour } n=0 : u_0 = 1000 \text{ et } 1000 \geq 800$$

Donc $P(0)$ est vraie

Étape d'hérédité : Soit n un entier fixé

• Supposons que pour cet entier la $P(n)$ est vraie

$$\text{Est à dire que } \underbrace{u_n \geq 800}_{\text{hyp. de récurrence}}$$

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire prouvons que : $u_{n+1} \geq 800$

BUT

Or par hypothèse de récurrence :

$$u_n \geq 800$$

$$\text{Donc } 0,4 \times u_n \geq 0,4 \times 800 \quad (\text{car } 0,4 > 0)$$

$$0,4 u_n \geq 320$$

$$\text{Donc } \underbrace{0,4 u_n + 480}_{\text{II}} \geq 320 + 480$$

$$\begin{array}{c} u_{n+1} \\ \text{(c'est-à-dire)} \end{array} \geq 800$$

Conclusion : $P(0)$ est vraie et pour tout entier $P(n)$ est héréditaire

$\rightarrow$ Donc d'après le principe de récurrence

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 800$ (u_n est minorée par 800.)

facteur commun

$$\begin{aligned} & \textcircled{2} \quad 0,4x - 1 \frac{3}{4} \\ & \nearrow = 0,4x + 480 - x \\ & \quad = \frac{0,4}{x} (0,4 - 1) = -0,6x \end{aligned}$$

1) b) Stabilité de la différence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 0,4u_n + 480 - u_n$
 $= -0,6u_n + 480$

Or d'après q(a) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 800$

Donc : $-0,6u_n \geq -0,6 \times 800$

Donc : $-0,6u_n \leq -480$

$-0,6u_n + 480 \leq -480 + 480$

||
 $u_{n+1} - u_n \leq 0$

Donc (u_n) est décroissante

2) " (u_n) décroît" signifie que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$ (à établir)

Soit $P(n)$ la propriété : $u_{n+1} \leq u_n$

Initialisation : Pour $n=0$, montrons que $P(0)$ est vraie c'est-à-dire $u_1 \leq u_0$

Or $u_0 = 1000$ et $u_1 = 0,4u_0 + 480 = 0,4 \times 1000 + 480$
 $= 400 + 480$
 $= 880$

$880 \leq 1000$ donc $u_1 \leq u_0$: $P(0)$ est vraie

Hérédité :

→ Soit n un entier fixé tel que $P(n)$ est vraie

On suppose donc que : $u_{n+1} \leq u_n$ HYP. RECURRENCE

Montrons donc que $P(n+1)$ est vraie à savoir que : $u_{n+2} \leq u_{n+1}$ BUT

Par hyp. de récurrence

$u_{n+1} \leq u_n$

Donc $0,4 \times u_{n+1} \leq 0,4 \times u_n$

Donc $0,4 \times u_{n+1} + 480 \leq 0,4 \times u_n + 480$

Donc $P(n+1)$ est vraie

||
 $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

Conclusion : $P(0)$ est vraie, et $P(n)$ est héréditaire à tout ordre n .

Donc d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$: (u_n) décroît

Exercice 5

Démontrer que pour tout réel x et tout entier naturel n , $(e^x)^n = e^{nx}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$n \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ la propriété : $(e^x)^n = e^{nx}$

Initialisation : Pour $n=0$, montrons que $(e^x)^0 = e^{0x}$

On $(e^x)^0 = 1$ et $e^{0x} = e^0 = 1$ Donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : Soit n un entier fixé, tel que $P(n)$ est vraie

→ On suppose donc que $(e^x)^n = e^{nx}$

H.R

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire prouvons que $(e^x)^{n+1} = e^{(n+1)x}$

On $(e^x)^{n+1} = (e^x)^n \times e^x = e^{nx} \times e^x$

BUT

Par hypothèse de récurrence $(e^x)^n = e^{nx}$

Donc $(e^x)^{n+1} = e^{nx} \times e^x = e^{nx+1x} = e^{(n+1)x}$

Donc la propriété $P(n+1)$ est vraie

Conclusion : $P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à tout ordre

Donc d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, (e^x)^n = e^{nx}$

Exercice 6 (par au contrôle)

Montrer que pour tout entier naturel n , $4^n - 1$ est un multiple de 3. (Vu en exemple d'introduction p.7).

$n \in \mathbb{N}$

Soit $P(n)$ la propriété : $4^n - 1$ est multiple de 3

Initialisation : Pour $n=0$, $4^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 3 \times 0$

Donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : Soit n un entier fixé tel que $P(n)$ est vraie

→ On suppose donc que $4^n - 1 = 3k$ avec k entier

H.R

Montrons alors que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire prouvons que $4^{n+1} - 1$ est multiple de 3

↪ c'est-à-dire prouvons que $4^{n+1} - 1 = 3\lambda$ avec λ entier

BUT

• On $4^{n+1} = 4^n \times 4$

Donc $4^{n+1} - 1 = 4^n \times 4 - 1$

Or d'après l'hypothèse de récurrence $4^n - 1 = 3k$, donc $4^n = 3k + 1$

→ Donc $4^{n+1} - 1 = (3k + 1) \times 4 - 1$

$4^{n+1} - 1 = 12k + 4 - 1 = 12k + 3$

$4^{n+1} - 1 = 3(4k + 1)$

Notons $\lambda = 4k + 1$

→ Donc $4^{n+1} - 1 = 3\lambda$ avec λ entier

Donc $P(n+1)$ est vraie

Conclusion $P(0)$ est vrai et $P(n)$ héréditaire à tout ordre

Donc d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est un multiple de 3.

Exercice 7

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{7u_n}$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 7$.

b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{7u_n}$$

Procédons par récurrence :

$$n \in \mathbb{N}, \text{ soit } P(n) \text{ la propriété : } 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 7$$

Initialisation : Pour $n=0$, justifions que

$$0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 7$$

$$\text{OR } u_0 = 2 \text{ et } u_1 = \sqrt{7u_0} = \sqrt{7 \times 2} = \sqrt{14} \approx 3,74$$

$$\text{Donc on a : } 0 \leq 2 \leq \sqrt{14} \leq 7$$

$$\text{Donc } 0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 7 : P(0) \text{ est vraie}$$

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé, tel que $P(n)$ est vrai.

→ Supposons donc que : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 7$ H.R.

Montrons alors que $P(n+1)$ est vrai, c'est-à-dire prouvons que $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 7$ BUT

Or par hypothèse de récurrence : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 7$ $\times 7 \Rightarrow 0 \leq 7u_n \leq 7u_{n+1} \leq 49$ $\sqrt{} \times 7$

Appliquons à cette chaîne d'inégalités la fonction racine carrée qui est croissante sur $]0, +\infty[$

donc on conserve le sens de ces inégalités

$$\text{Donc : } \underbrace{\sqrt{0}}_0 \leq \underbrace{\sqrt{7u_n}}_{u_{n+1}} \leq \underbrace{\sqrt{7u_{n+1}}}_{u_{n+2}} \leq \underbrace{\sqrt{49}}_7$$

$$\text{Donc } P(n+1) \text{ est vraie} \quad u_n \xrightarrow{\times 7} 7u_n \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{7u_n} = u_{n+1}$$

Conclusion : $P(0)$ est vraie, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est héréditaire

Donc d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 7$

b) D'après la question 1) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$, donc (u_n) croît

Exercice 8 (Inégalité de Bernoulli (sera utilisée dans la suite du cours)).

Soit x un réel positif ou nul. Démontrer que pour tout entier naturel n , $(1+x)^n \geq 1+nx$.

$x \geq 0$ On procède par récurrence :

$n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la propriété suivante : $(1+x)^n \geq 1+nx$

Initialisation Pour $n=0$: $(1+x)^0 = 1$ et $1+x \times 0 = 1$

$$\text{Or } 1 \geq 1$$

Donc $(1+x)^0 \geq 1+0x$ est vraie

Hérédité : Soit n un entier fixé, tel que $P(n)$ est vraie

On suppose que $(1+x)^n \geq 1+nx$ **H.R**

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x \quad \text{BUT (résultat à obtenir)}$$

Par hypothèse de récurrence on a : $(1+x)^n \geq 1+nx$

$$\left(\begin{array}{l} (1+x)^{n+1} \\ a^{m+1} = a^n \times a \end{array} = (1+x)^n \times (1+x) \right) \text{ car }$$

$$\text{Donc : } (1+x) \times (1+x)^n \geq (1+x) \times (1+nx) \quad \begin{array}{l} \text{car } 1+x > 0, \text{ car } x \geq 0 \\ \text{donc } 1+nx \geq 1+0x \end{array}$$

$$\downarrow \text{ développe}$$
$$(1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x+nx^2$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x \quad \text{car } nx^2 \geq 0$$

Donc $P(n+1)$ est vraie

Conclusion $P(0)$ est vraie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est héréditaire
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+nx$

Avant de commencer l'exercice 9, commençons par des rappels sur la notation $\sum$ et les sommes.

$\sum$ désigne la lettre S majuscule en Grec, et en mathématiques signifie la somme !

Par exemple : $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$ se notera : $\sum_{k=1}^4 k^2$: il faut comprendre qu'on donne à k (appelé l'indice de la somme, l'indice étant toujours un entier) successivement les valeurs 1, 2, 3 et 4 (k avance régulièrement de 1 en 1, en commençant à la valeur 1 et en terminant à la valeur 4) et qu'on ajoute entre-elles les carrés de ces valeurs.

Par exemple : $\sum_{k=0}^5 3^k = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 = 364$.
L'intérêt d'une telle notation est qu'elle condense les écritures et permet d'éviter les pointillés.

Dans l'absolu, la notation : $\frac{2}{6} + \frac{2}{6^2} + \frac{2}{6^3} + \frac{2}{6^4}$ est incorrecte, et se note rigoureusement : $\sum_{k=1}^4 \frac{2}{6^k}$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, et $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ des réels.

Pour les exercices, il est fort utile d'avoir compris l'évidence (?) suivante :

$$\sum_{k=0}^5 3^k = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5$$
$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$
$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1}$$

$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1}$: on ne fait qu'éclater en deux la première somme écrite, en sortant son dernier terme !!!

Grâce aux rappels sur les sommes, vous pouvez aborder sereinement l'exercice 9 :

Exercice 9

Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

$n \in \mathbb{N}^*$

Soit $P(n)$ la propriété : $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Initialisation :

Pour $n=1$, montrons que $\sum_{k=1}^1 k^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$

On $\sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1$ et $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{1 \times 2}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$

Donc $P(1)$ est vraie

Hérédité : Soit n un entier fixé non nul

tel que $P(n)$ soit vraie

↳ On suppose donc que $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ HYP de R.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie c-à-d mq :

$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}\right)^2$ BUT

On # $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3$

Par l'hypothèse de récurrence

$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

$\left(\frac{a \times b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 \times b^2}{2}$

Donc # $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$

$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n+1 \right)$

$= (n+1)^2 \left(\frac{n^2 + 4n + 4}{4} \right) = \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2$

Donc $P(n+1)$ est vraie

Conclusion : $P(1)$ est vraie & pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est héréditaire

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Remarques

- 1) Il faut rester lucide avant de faire une récurrence : si on vous demande de justifier que pour tout entier naturel n , $(2n-1)^2 > 0$, il serait grotesque de procéder par récurrence ! Pourquoi ?
- 2) D'aucuns peuvent se demander l'utilité de l'étape d'initialisation dans le raisonnement par récurrence.

$$\text{car si } n = n+1, \text{ alors } n+1 = \frac{n+1+1}{n+1}$$

Soit $P(n)$ la propriété : pour tout entier naturel n , $n = n+1$.

Démontrer que $P(n)$ est héréditaire, sans pour autant être vraie. Conclusion ?

- 3) Dans les copies, on voit parfois fleurir l'étape d'hérédité rédigée comme suit :

"Supposons que pour tout entier naturel n , $P(n)$ soit vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie".

Que pensez-vous de ce mode de rédaction ? ~ Rédaction fautive : Si on suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie de surcroît !

Un exercice classique de baccalauréat

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0,4$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

- A l'aide d'une calculatrice, émettre une conjecture sur la monotonie de la suite (u_n) , et conjecturer un minorant et un majorant de la suite (u_n) .
- Déterminer une fonction f , telle que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Etudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0; \frac{1}{2}]$.
- Démontrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.
- Qu'en déduisez-vous concernant les conjectures effectuées à la question a) ?

$$u_0 = 0,4 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

a)

n	0	1	2	3	...	10
u_n	0,4	0,24	0,18	0		0,0690

(calculatrice : arrondi à 0,001 près)

→ Il semblerait que la suite (u_n) soit décroissante

(u_n) semble être majorée par 0,4 (ou 0,5 ...) et minorée par 0

b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2 = f(u_n)$

où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - x^2$$

c) $x \in [0; \frac{1}{2}]$

$$f(x) = x - x^2 \quad f'(x) = 1 - 2x$$

Étudions le signe de la dérivée :

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 2x \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Or } x \in [0; \frac{1}{2}], \text{ donc } f'(x) \geq 0, \text{ donc } f \text{ croît sur } [0; \frac{1}{2}]$$

d) On procède par récurrence.
 $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la propriété : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{2}$

Initialisation : Pour $n=0$, on a

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{2}$$

Grâce au tableau de q.a) : $u_1 = 0,24$
 $u_0 = 0,4$

On a bien $0 \leq 0,24 \leq 0,4 \leq \frac{1}{2}$ Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier fixé tel que $P(n)$ soit vraie.

On suppose donc que : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ H. de R.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c-à-d que :

$$0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}, \text{ BUT}$$

Par hypothèse de récurrence :

$$0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

On applique la fonction f à cette chaîne d'inégalité : par croissance de f sur $[0, \frac{1}{2}]$ on a :

$$\underbrace{f(0)}_{=0} \leq \underbrace{f(u_{n+1})}_{=u_{n+2}} \leq \underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}} \leq \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0,5 - 0,5^2 = 0,5 - 0,25 = 0,25 = \frac{1}{4}$$

Or $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$ Donc $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(0)$ est vraie, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est héréditaire.

Donc d'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{2}}$$

e) D'après la quest. d) :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$, donc (u_n) est décroissante, la première conjecture est vraie.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ donc (u_n) est bornée.

minorée par 0, et majorée par $\frac{1}{2}$.

Comme (u_n) décroît, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_0$
 $u_n \leq 0,4$

Donc 0,4 est un majorant de (u_n) .

III Calcul des termes d'une suite récurrente à l'aide d'un algorithme

Prenons la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = -3u_n + 7$.

But : On veut écrire un algorithme qui affiche en sortie la valeur de u_N pour un entier N du choix de l'utilisateur :

L'idée est de comprendre que l'on va répéter N fois un calcul similaire à partir de la valeur initiale u_0 .

On stocke donc en mémoire dans une variable nommée U la valeur 2 qui correspond à u_0 .

En pseudo code, cela est noté : $U \leftarrow 2$ (et signifie : affecter à la variable U la valeur 2, ou encore, plus simplement, U prend la valeur 2).

Puis on crée un compteur de boucle qui va compter le nombre de répétitions effectuées (*Boucle Pour*)

Voici le programme écrit en pseudo code :

Demander à l'utilisateur l'entier naturel N de son choix. $U \leftarrow 2$] Premier terme de la suite (u_n) : $u_0 = 2$ Pour K variant de 1 à N, faire : $U \leftarrow -3U + 7$ <i>instruction</i> Fin de pour Afficher U en sortie	<i>Je choisis $N = 2$:</i> • Ainsi K varie de 1 à 2 (donc on va répéter 2 fois l'action : $U \leftarrow -3U + 7$) • Pour $K = 1$; la valeur stockée dans la variable U passe de 2 à $-3 \times 2 + 7 = 1$ Ainsi $U = 1$ après le premier tour de boucle • Pour $K = 2$; On passe de $U = 1$ à $U = -3 \times 1 + 7 = 4$ $U = 4$ après le deuxième tour de boucle <i>Affichage en sortie : 4</i>
---	---

Il faut bien comprendre quand on dit que K varie de 1 à N , que K , qui est une variable muette (on aurait pu l'appeler L , I , ...), va *successivement prendre les valeurs entières en commençant à la valeur 1, et en terminant à la valeur N* , et que pour chacune de ces valeurs, on remplace la valeur stockée dans la variable U par $-3U + 7$.

Comprendre comment...

Comprenons comment fonctionne ce programme lorsque l'utilisateur choisit $N = 2$ par exemple :

Malheureusement, sur la calculatrice, on ne peut pas coder en pseudocode !
On se servira exclusivement de *Python* pour coder cette année.

Voici un programme en *Python* qui permet de réaliser l'algorithme voulu :

En *Python*, l'instruction $u = 2$ signifie que la variable u prend la valeur 2.
L'instruction `for k in range(n)` signifie que l'entier k vérifie la condition : $0 \leq k < n$, et prend successivement les valeurs $0 ; 1 ; \dots$ et pour dernière valeur $n - 1$.
(k prend n valeurs $0 \leq k < n$ (k entier))

Attention dans l'inégalité : $0 \leq k < n$, la valeur n est exclue !

```
def u(n):  
    u=2  
    for k in range (n):  
        u=-3*u+7  
    return u
```

Vous téléchargerez Python sur : <https://edupython.tuxfamily.org/>

Python s'utilise bien sur un ordinateur ou tablette, mais c'est moche sur calculatrice ! Il est implanté sur Numworks.

L'essentiel pour le bac est de comprendre une procédure (= un script) donnée, écrite en Python, ce n'est pas grave si au début ça bug pas mal quand vous programmez : (oubli récurrent des : , du signe multiplié * (à mettre obligatoirement) , indentation non respectée...).

Dans la console, si on veut calculer u_5 il suffira de taper : `u(5)` puis entrée le résultat s'affichera alors.

Combien vaut u_8 ? On tape : $u(8)$ dans la console : $u_8 = 1642$

Remarques : on utilise fréquemment l'instruction : for k in range $(0, n)$ qui signifie que l'entier k vérifie la double inégalité : $0 \leq k < n$.

Et si l'on tapait : for k in range $(1, n+1)$, le programme serait-il correct? $\rightarrow$ oui

Comment afficher à l'écran tous les termes d'une suite jusqu'à un rang n choisi par l'utilisateur? Cela peut être utile pour établir une conjecture.

$\rightarrow u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$
Pour afficher tous les termes jusqu'à celui de rang n d'une suite, on utilise des listes :

Par exemple, considérons la suite définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n^2 - 5$.

L'algorithme ci-dessous, à retenir, génère en sortie les termes : $u_0, u_1, \dots, u_n$ où n est choisi par l'utilisateur.

En pseudo code :

$A \leftarrow 0$	 > Initialement A prend la valeur 0 car $u_0 = 0$.
$L \leftarrow [A]$	 > Au départ, la liste L contient seulement l'élément u_0 .
Pour k variant de 1 à n	 > On répète n fois une même instruction
$A \leftarrow A^2 - 5$ = <i>def suite</i>	 > On calcule un terme à partir du précédent contenu dans A
$L \leftarrow L + [A]$	 > Le terme calculé à l'étape précédente est inséré dans la liste L .
Fin de pour	
Retourner L	 > En fin du programme, L contient tous les termes de la suite, de u_0 à u_n .

En Python :

def termes(n):

En Python :

def termes_u(n):

```
A=0
L=[A]
for k in range(n):
    A=A*A-5
    L=L+[A]
return(L)
```

ou encore :

def termes_u(n):

```
A=0
L=[A]
for k in range(1,n+1):
    A=A*A-5
    L=L+[A]
return(L)
```

ou bien

def termes(n):

```
A=0
L=[A]
for k in range(n):
    A=A*A-5
    L.append(A)
return(L)
```

L.append(A) signifiant : mettre* après le dernier élément de la liste L le nombre A. (*ou encore adjoindre).

adjoindre à la
liste L la dernière
valeur de A
calculée

On obtient une liste ordonnée L d'éléments.

Exemple

```
from math import*
def mystere(n):
    u=sqrt(2) → √2
    L=[u] → L=[√2]
    for k in range(n):
        u=u**2+2*u-1
        L.append(u)
    return((L),u)
```

sqrt = racine

a) Si $n=1$

mystere(1) renvoie en sortie : $([\sqrt{2}; 1+2\sqrt{2}], 1+2\sqrt{2})$

b) Cet algorithme affiche pour l'entier du choix de l'utilisateur
la liste : $[u_0, u_1, \dots, u_n]$ ainsi que la terme u_n
où (u_n) est la suite récurrente définie par $u_0 = \sqrt{2}$

$$u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n - 1$$

$$u_1 = \sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2} - 1 = 1 + 2\sqrt{2}$$

$$L = [\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}]$$

- L'utilisateur choisit $n = 1$. Déterminer l'affichage en sortie de programme.
- Quel est le rôle de cet algorithme vis-à-vis d'une suite à définir ?
- Vérifier avec Python. Qu'affiche ce dernier si l'on tape mystere(2) ?
- Quelle conjecture émettez-vous concernant le sens de variation de cette suite ? Et sur les valeurs prises par cette dernière lorsque n devient "grand" ?

d) (u_n) semble être croissante : lorsque n devient très grand, u_n semble devenir extrêmement

On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Voici deux questions indépendantes d'un même **sujet de baccalauréat (2023)** :

A-

On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous qui prend une liste `L` de nombres en paramètre.

On rappelle que `len(L)` représente la longueur de la liste `L`.

Sur Python $1,8 \Rightarrow 1.8$

$L[i] = i+1$ ième terme de la liste

def mystere(L) :

`S = 0`

for `i in range(len(L)) :`

`S = S + L[i]`

return `S / len(L)`

$\rightarrow$ `for i in range(10)` : répétition 10 instructions :
`return` : $\frac{1+9+9+5+0+3+6+12+0+5}{10}$
 $= \frac{S}{len(L)} = \frac{50}{10} = \boxed{5}$

$L[0]$

$\hookrightarrow$ div

FAUSSE

Affirmation : L'exécution de `mystere([1, 9, 9, 5, 0, 3, 6, 12, 0, 5])` renvoie 50.

Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ? Justifier. $\uparrow$ Ici `len(L) = 10` (nbr d'éléments de la liste)

B-

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3.$$

1. a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.

utilise q.A $\Rightarrow$ b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-3 < u_n \leq -1$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

PARTIE B :

PARTIE B: $u_0 = -1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3$

1) a) $n \in \mathbb{N}$, Soit $P(n)$ la propriété :

$$u_n = 2 \times 0,9^n - 3$$

Initialisation : pour $n=0$, justifions que $u_0 = 2 \times 0,9^0 - 0,3$

$$\text{Or } u_0 = -1 \text{ et } 2 \times 0,9^0 - 3 = -1$$

$P(0)$ est vraie

Hérédité : Soit n un entier fixé, tel que $P(n)$ est vraie

$$\rightarrow \text{On suppose que : } u_n = 2 \times 0,9^n - 3$$

Hypothèse de récurrence.

Montrons que $P(n+1)$ est vrai, c'est-à-dire prouvons que :

$$u_{n+1} = 2 \times 0,9^{n+1} - 3 \quad \text{BUT}$$

$$\text{Or d'après l'énoncé : } u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$ de sorte que :

$$u_{n+1} = 0,9 \times (2 \times 0,9^n - 3) - 0,3$$

$$u_{n+1} = 0,9 \times 2 \times 0,9^n - 0,3 \times 3 - 0,3$$

$$u_{n+1} = 2 \times 0,9 \times 0,9^n - 2,7 - 0,3$$

$$u_{n+1} = 2 \times 0,9^{n+1} - 3$$

Donc $P(n+1)$ est vraie

Conclusion : $P(0)$ est vraie et pour tout entier naturel n , $P(n)$ est héréditaire

$$\text{Donc : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \times 0,9^n - 3$$

b) D'après q.a) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \times 0,9^n - 3$

Or $0,9 > 0$, donc $0,9^n > 0$ car $0,9^1 = 0,9 \times 0,9 \times 0,9 \dots n$ fois
 $2 > 0$, donc $2 \times 0,9^n > 0$ (règle des signes)

$$\text{donc } \underbrace{2 \times 0,9^n - 3}_{u_n} > 0 - 3$$

$$u_n > -3$$

$0 \leq 0,9 \leq 1$ Donc $0^n \leq 0,9^n \leq 1^n$ car $x \mapsto x^n$ croît sur $[0,1]$

$$\begin{array}{l} \times 2 \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq 0,9^n \leq 1 \\ 0 \leq 2 \times 0,9^n \leq 2 \end{array} \right. \times 2 \\ -3 \left\{ \begin{array}{l} -3 \leq \underbrace{2 \times 0,9^n - 3}_{u_n} \leq -1 \end{array} \right. -3 \end{array}$$

$$u_n \leq -1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, -3 < u_n \leq -1$$

c) Rappel : (u_n) est strictement décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$

Méthode de la différence :

D'après 1) a) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \times 0,9^n - 3$

$$\text{Donc } u_{n+1} = 2 \times 0,9^{n+1} - 3$$

$$\text{Donc } u_{n+1} - u_n = 2 \times 0,9^{n+1} - 3 - (2 \times 0,9^n - 3)$$

$$u_{n+1} - u_n = 2 \times 0,9^{n+1} - 3 - 2 \times 0,9^n + 3$$

$$u_{n+1} - u_n = 2 \times 0,9^{n+1} - 2 \times 0,9^n$$

$$u_{n+1} - u_n = 2 \times 0,9^n \times 0,9 - 2 \times 0,9^n = 2 \times 0,9^n \times (0,9 - 1) = 2 \times 0,9^n \times (-0,1)$$

$$u_{n+1} - u_n = -0,2 \times 0,9^n$$

Or $-0,2 < 0$; $0,9 > 0$, donc $0,9^n > 0$

$$\text{Donc } -0,2 \times 0,9^n < 0$$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$ Donc (u_n) est strictement décroissante.

Méthode Bis : (avec relation initiale)

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,9 u_n - 0,3$$

$$\text{Donc : } \begin{array}{l} u_{n+1} - u_n = 0,9 u_n - 0,3 - u_n \\ u_{n+1} - u_n = \boxed{-0,1 u_n - 0,3} \end{array}$$

D'après q.b) : $\forall n \in \mathbb{N}, -3 < u_n$

$$\text{Donc } -3 \times (-0,1) > -0,1 u_n \text{ car } 0,1 < 0$$

$$0,3 > -0,1 u_n$$

$$0,3 + 0,3 > -0,1 u_n - 0,3$$

Donc (u_n) est strictement décroissante.