Chapitre XI :

« La mathématique universelle est une logique de l'imagination. » Gottfried Leibniz

Chapitre XI — **Primitives et équations différentielles**

I – Primitives

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On appelle ***primitive de f*** sur I, toute fonction $\boldsymbol{F}$ définie sur I telle que :
$$\begin{cases} 1) \text{ F est dérivable sur I} \\ \text{et} \\ 2) \ \forall x \in I \ ; \ F'(x) = f(x) \quad (\text{ie } F' = f) \end{cases}$$

Exemple : Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 2 \quad g(x) = e^x \quad h(x) = e^{-2x} \quad i(x) = x^2.$

- $f(x) = 2 \ ; x \in \mathbb{R}$

  F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 2x$ est une primitive de f car $F'(x) = 2 = f(x)$

  Rq : une autre primitive de f est : $G(x) = 2x + 7$ car $G'(x) = 2$

- $g(x) = e^x$

  $G(x) = e^x$: G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$ car $G'(x) = e^x = g(x)$

- $h(x) = e^{-2x}$

  $H(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$: H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$ car : $H'(x) = -\frac{1}{2} \times (-2)e^{-2x}$

  $H'(x) = e^{-2x} = h(x)$

- $i(x) = x^2$

  $I(x) = \frac{x^3}{3}$: I est une primitive de i sur $\mathbb{R}$ car : $I'(x) = \frac{3 \times x^{3-1}}{3} = x^2$

Exercice 1

F est définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (2x - 5)e^{-x}$.

Vérifier que F est une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = (-2x + 7)e^{-x}$

$F(x) = (2x - 5)e^{-x}$

où $\begin{cases} u(x) = 2x - 5 \\ u'(x) = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} v(x) = e^{-x} \\ v'(x) = -e^{-x} \end{matrix}$

F est dérivable (produit) et :

$F'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$F'(x) = 2e^{-x} + (2x - 5) \times (-e^{-x})$

$F'(x) = e^{-x}(2 - (2x - 5)) = e^{-x}(2 - 2x + 5)$

$F'(x) = (-2x + 7)e^{-x} = f(x)$

Donc $\boxed{\text{F est une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}}$

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et F une primitive de f sur I.

L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions définies sur I, de la forme :
$G(x) = F(x) + k$, où k est un réel quelconque.

Remarque : on retiendra donc que les primitives d'une même fonction donnée ne diffèrent que d'une …constante…………
Et que si une fonction admet une primitive sur un intervalle, alors elle en admet une infinité……

Preuve : Soit F une primitive de f sur I.

Notons : $P(f)$ l'ensemble de toutes les primitives de f sur I et $\Omega = \left\{ \begin{array}{l} G : I \to \mathbb{R} \\ \quad x \to G(x) = F(x) + k \text{ où } k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$.

Montrons que $P(f) = \Omega$.

Rappel : Soient A et B deux ensembles. Dire que A = B équivaut à : $A \subset B$ et $B \subset A$.

Montrons déjà que $\Omega \subset P(f)$:
Soit G $\in \Omega$: il existe un réel k tel que $\forall x \in$ I, $G(x) = F(x) + k$.
G est dérivable sur I car F l'est et k est une constante.
$\forall x \in$ I, $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$ car F est une primitive de f sur I et donc $F' = f$!
Par suite G est bien une primitive de f sur I, donc G $\in P(f)$: on a donc établi que $\Omega \subset P(f)$.

Réciproquement : montrons que $P(f) \subset \Omega$:
Soit $H \in P(f)$: H est donc dérivable sur I, et $\forall x \in$ I, $H'(x) = f(x)$.
Or F est une primitive de f sur I, donc F est dérivable sur I et $\forall x \in$ I, $F'(x) = f(x)$.

Par suite, la fonction $F - H$ définie sur I est dérivable sur I et :
$\forall x \in$ I, $(F - H)'(x) = F'(x) - H'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Par suite $F - H$ est constante sur l'intervalle I : il existe donc un réel k tel que pour tout x appartenant à I, on ait : $F(x) - H(x) = k$, et donc, $F(x) = H(x) + k$.
Donc $H \in \Omega$, et par suite on a établi que $P(f) \subset \Omega$.
Ainsi par double inclusion, on a établi que $P(f) = \Omega$.

Propriété (condition initiale)

Soit f une fonction admettant des primitives sur I.
Pour tout réel $x_0 \in I$ et pour tout réel y_0, il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

Preuve :

Soit F une primitive de f sur I.
Soit G la fonction définie sur I par : $\forall x \in I$, $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$ (G est une primitive de f sur I).
Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
$G(x_0) = y_0 \Leftrightarrow F(x_0) + k = y_0 \Leftrightarrow k = y_0 - F(x_0)$.
Donc la fonction G définie sur I par : $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$ est l'unique primitive de f telle que $G(x_0) = y_0$.

Remarque : cette propriété, vous l'utilisez souvent en Physique, avec la donnée d'une condition initiale !

Exercice 2

Démontrer que la fonction F définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien, puis déterminer la primitive G de la fonction $\ln$ telle que : $G(1) = 2$.

- $x > 0$ et $F(x) = x\ln(x) - x$; $f(x) = \ln(x)$

$\Rightarrow$ F dérivable sur $]0 ; +\infty[$ car produit et somme de fonct° dérivables :
où $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = \ln(x) \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

$\forall x \in]0 ; +\infty[$; $F(x) = u(x) + v(x) - u(x)$
$F'(x) = u'v + uv' - u$
$F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - x$
$F'(x) = \ln(x) = f(x)$.

On cherche la primitive G de ln tel que $\underbrace{G(1) = 2}_{\text{condition initiale}}$.

On a : $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$

Donc $G(1) = 2 \iff F(1) + k = 2$

$\iff k = 2 - F(1)$

$k = 2 - (\underbrace{1 \ln 1}_{= 0} - 1)$

$k = 3$

$\boxed{G(x) = x\ln(x) - x + 3}$

Voici une compilation d'exercices sous forme de QCM tombés récemment au baccalauréat.

Exercice 3

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

1.
La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ admet pour primitive sur $]0\,;\,+\infty[$ la fonction :

a. $x \longmapsto \ln(x)$ ↳ dérivée $\frac{1}{x}$ **b.** $x \longmapsto \frac{1}{x}$ ↳ $-\frac{1}{x^2}$ **c.** $x \longmapsto x\ln(x) - x$ **d.** $x \longmapsto \frac{\ln(x)}{x}$ ↳ $= \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \neq \ln(x)$

2.
Si H est une primitive d'une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$, et si k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = h(2x)$, alors, une primitive K de k est définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $K(x) = H(2x)$	**b.** $K(x) = 2H(2x)$	**c.** $K(x) = \frac{1}{2}H(2x)$	**d.** $K(x) = 2H(x)$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ H'(x) = h(x)$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ K'(x) = k(x)$

3.
Parmi les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{-x^2} + 2$:

a. toutes sont croissantes sur $\mathbb{R}$;

b. toutes sont décroissantes sur $\mathbb{R}$;

c. certaines sont croissantes sur $\mathbb{R}$ et d'autres décroissantes sur $\mathbb{R}$;

d. toutes sont croissantes sur $]-\infty\,;\,0]$ et décroissantes sur $[0\,;\,+\infty[$.

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 e^{-x^2}$$

Si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$,

a. $F(x) = -\frac{1}{6}(x^3+1)e^{-x^2}$

b. $F(x) = -\frac{1}{4}x^4 e^{-x^2}$

c. $F(x) = -\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}$

d. $F(x) = x^2(3-2x^2)e^{-x^2}$

2) a) $K'(x) = 2H'(2x) = 2h(2x)$ ✗

b) $K'(x) = 4h(2x)$ ✗

c) $K'(x) = \frac{1}{2} \times 2h(2x) = h(2x) = k(x)$ ✓

3) $F'(x) = f(x) = \underbrace{3e^{-x^2} + 1}_{>0}$ $\Rightarrow$ Donc F croissante sur $\mathbb{R}$

4) d) $F(x) = (3x^2 - 2x^2)e^{-x^2}$

$F'(x) = (6x - 8x^3) \times e^{-x^2} - (3x^2 - 2x^4) \times 2xe^{x^2}$

$F'(x) = (6x - 8x^3 - 6x^3 + 2e^5)e^{-x^2}$ ✗

c) $F(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)e^{-x^2}$

$F'(x) = -\frac{1}{2}\left[2xe^{-x^2} - 2x(x^2+1)e^{-x^2}\right]$

$F'(x) = -\frac{1}{2}\left[-2x^3e^{-x^2}\right] = x^3e^{-x^2} = f(x)$ ✓

5.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x+1}$.

La seule primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f telle que $F(0) = 1$ est la fonction :

a. $x \longmapsto 2e^{2x+1} - 2e + 1$

b. $x \longmapsto 2e^{2x+1} - e$

c. $x \longmapsto \frac{1}{2}e^{2x+1} - \frac{1}{2}e + 1$

d. $x \longmapsto e^{x^2+x}$

6.

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln x$.

Une primitive F de f sur $]0\,;+\infty[$ est définie par :

a. $F(x) = \frac{1}{3}x^3\left(\ln x - \frac{1}{3}\right)$;

b. $F(x) = \frac{1}{3}x^3(\ln x - 1)$;

c. $F(x) = \frac{1}{3}x^2$; ✗

d. $F(x) = \frac{1}{3}x^2(\ln x - 1)$. ✗

5) $f(x) = e^{2x+1}$

$\hookrightarrow F(x) = \frac{e^{2x+1}}{2} + k$ où $k \in \mathbb{R}$

$F(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{e^{2x+1}}{2} + k = 1$

$\Leftrightarrow \frac{e}{2} + k = 1 \Leftrightarrow k = 1 - \frac{e}{2}$

$F(x) = \frac{e^{2x+1}}{2} + 1 - \frac{e}{2}$ RÉPONSE C

6) a) $F'(x) = \frac{1}{3}\left(3x^2\left(\ln(x) - \frac{1}{3}\right) + x^3 \times \frac{1}{3}\right)$

$F'(x) = x^2\left(\ln(x) - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \times x^2$

$F'(x) = x^2 \ln(x)$

Comment calculer des primitives de fonctions ?

Par lecture en sens inverse du tableau donnant les fonctions dérivées, on obtient le tableau suivant qui permet de trouver les primitives des fonctions de référence.

Ce tableau est à connaitre par cœur sans la moindre hésitation :

Primitives des fonctions de référence

f est définie par $f(x)$ =	Les primitives de f sur I sont définies par $F(x)$ =	Sur l'intervalle I =
$f(x) = a$, où $a \in \mathbb{R}$	où $k \in \mathbb{R}$ $F(x) = ax + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	où $k \in \mathbb{R}$ $F(x) = \frac{x^2}{2} + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{Z}-\{-1\}$ $n \neq 1$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$ où $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ $\mathbb{R}^*$ si $n < -1$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(\lvert x \rvert) + k$ si $x > 0$; $F(x) = \ln(x) + k$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = \frac{-1}{x} + k$ $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$	$]0 ; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^{ax}$ où $a \in \mathbb{R}^*$ $(a \neq 0)$	$F(x) = \frac{e^{ax}}{a} + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = sin(ax+b)$ $a \neq 0$	$F(x) = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = cos(ax+b)$ $a \neq 0$ (a et b réels)	$F(x) = \frac{\sin(ax+b)}{a} + k$	$\mathbb{R}$

Propriété (très utilisée en pratique)

Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$, admettant respectivement les fonctions F et G comme primitives sur I.

Alors : (1) La fonction $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
(2) Pour tout réel α, la fonction αF est une primitive de αf sur I.

Preuve : (1) F est dérivable sur I
G ———————, donc par somme F + G est dérivable sur I

$\forall x \in I$; $(F+G)'(x) = \underbrace{F'(x)} + \underbrace{G'(x)}$
$= f(x) + g(x)$ $\quad (F+G)'(x) = (f+g)(x) \Rightarrow$ F + G est une primitive de $f+g$.

On sait donc, à présent, déterminer des primitives de toute combinaison linéaire des fonctions de référence.

$$\ln(\lvert x \rvert) = \begin{cases} \ln(x) \text{ si } x > 0 \Rightarrow \text{dérivée } \frac{1}{x} \\ \ln(-x) \text{ si } x < 0 \Rightarrow \text{dérivée : } -1 \times \frac{1}{-x} = \frac{1}{x} \end{cases}$$

- $(\cos)' = -\sin$

$(\sin)' =$

Exercice 4

En utilisant le résultat de l'exercice 2 page 2, déterminer une primitive de la fonction logarithme décimal (*log*).

- $x>0$; $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$ on a vu que $F(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de $f(x) = \ln(x)$.

Soit Γ une primitive de log :

$$\Gamma(x) = \frac{x\ln(x) - x}{\ln(10)}$$

$$\Gamma(x) = \frac{x\ln(x)}{\ln(10} - \frac{x}{\ln(10)} = x\log(x) - \frac{x}{\ln(10)}$$

$$\Gamma(x) = x\log(x) - x\log(e) = x(\log(x) - \log(e))$$

$$\boxed{\Gamma(x) = x\log\left(\frac{x}{e}\right)}$$

- $P(fg) \neq P(f) \times P(g)$
- $P\left(\dfrac{f}{g}\right) \neq \dfrac{P(f)}{P(g)}$

Remarque importante

En règle générale, il n'y a pas de relation permettant de trouver des primitives un produit ou un quotient.

En particulier, une primitive de fg n'est pas égale au produit d'une primitive de f par une primitive de g, tout comme une primitive de $\dfrac{f}{g}$ n'est pas une primitive de f divisée par une primitive de g.

Contre-exemples :

Pour le produit : $f(x) = 1$ $\quad F(x) = x$ DONC : $F(x)G(x) = 2x^2 \neq P(fg)$

$g(x) = 2$ $\quad G(x) = 2x$

$(fg)(x) = 2$ $\quad P((fg)(x)) = 2x$

Pour le quotient :

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{2}$ donc $P\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x}{2}$ et $\dfrac{F(x)}{G(x)} = \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$

Remarque XXL

Dans les exercices, on peut, si on n'est pas sûr de sa réponse, contrôler cette dernière : si on vous demande de trouver une primitive F d'une fonction f donnée par l'énoncé, en dérivant le candidat obtenu F, vous devez obtenir la fonction f donnée par l'énoncé !!!

Exercice 5 ***(Tout en délicatesse)***

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur le plus grand intervalle possible que l'on précisera :

a) $f(x) = 2x^4$ b) $g(x) = x^2 + \dfrac{3}{5}x + 3$ c) $h(x) = \dfrac{-1}{4}x^3 + 5x^2 - 4x + 1$; d) $l(x) = 4e^{-7x} + x^3 + \dfrac{3}{4\sqrt{x}}$

e) $m(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^4} + e^{5x}$ f) $n(x) = 3\cos(x) + \sin(4x)$ g) $p(x) = -3(2x + e^x)$ h) $q(x) = \dfrac{2}{x^2} + 2026.$

a) $F(x) = 2 \times \dfrac{1}{5}x^5 = \dfrac{2x^5}{5}$

b) $g(x) = x^2 + \dfrac{3}{5}x + 3$

$G(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{x^2}{2} + 3x = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{10} + 3x$

c) $h(x) = \frac{-1}{4}x^3 + 5x^2 - 4x + 1$

$H(x) = -\frac{1}{4} \times \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - 2x^2 + x$

$H(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - 2x^2 + x$

d) $l(x) = 4e^{-7x} + x^3 + \frac{3}{4\sqrt{x}}$

$L(x) = 4 \times \frac{e^{-7x}}{-7} + \frac{x^4}{4} + \frac{3}{4} \times 2\sqrt{x}$

$L(x) = -\frac{4}{7}e^{-7x} + \frac{x^4}{4} + \frac{3\sqrt{x}}{2}$

e) $m(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^4} + e^{5x}$ sur $]0;+\infty[$

$\left(x^{-3} = \frac{1}{x^3}\right)$

$M(x) = \ln(x) - 3 \times \frac{x^{-3}}{-3} + \frac{e^{5x}}{5}$

$M(x) = \ln(x) + \frac{1}{x^3} + \frac{e^{5x}}{5}$

f) $n(x) = 3\cos(x) + \sin(4x)$

$N(x) = 3\sin(x) + \left(\frac{-\cos(4x)}{4}\right)$

$N(x) = 3\sin(x) - \frac{\cos(4x)}{4}$

g) $p(x) = -3(2x + e^{x})$

$P(x) = 3(x^2 + e^{x})$

h) $q(x) = \frac{2}{x^2} + 2026$

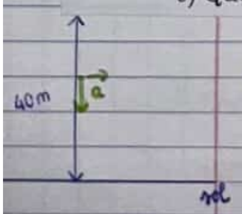
$q(x) = 2 \times \frac{1}{x^2} + 2026$

$Q(x) = \frac{-2}{x} + 2026x$

Exercice 6

Un objet est lâché de 40 mètres de hauteur dans le vide, sans vitesse initiale.
Son accélération est constante et égale à 9,81 $N.m^{-2}$.

a) Déterminer la vitesse instantanée de cet objet à un instant *t* avant qu'il ne rencontre le sol.
b) Déterminer la loi horaire de l'objet.
c) Quelle sera la durée de chute de cet objet (arrondir à 0,1 seconde près).



a) Vitesse instantanée = Primitive de l'accélération
ou l'accélération = dérivée v. instantanée.

- loi horaire (distance parcourue) = primitive de la v. i
v. i = dérivée de la loi horaire.

Ici : $a(t) = 9,81$ (acc constante)

Donc $\underbrace{v(t)}_{\text{v.i à l'instant } t \text{ de la balle}} = 9,81t + K$ où $K \in \mathbb{R}$.

Or $v(0) = 0$ (v.i nulle)

Donc : $0 = 9,81 \times 0 + K$; $K = 0$

$$\boxed{v(t) = 9,81t}$$

b) $h(t)$: distance parcourue par l'objet à l'instant t

$h(t) = P(v(t)) = 9,81\frac{t^2}{2} + \lambda = 0$; donc $\lambda = 0$

$$\boxed{h(t) = \frac{9,81t^2}{2} = 4,905t^2}$$

c) $\underbrace{h(t) = 40}_{\text{quand la balle touche le sol : à parcourir 40m}} \iff 4,905t^2 = 40 \iff t^2 = \frac{40}{4,905} \iff t = \sqrt{\frac{40}{4,905}}$ ($t \geqslant 0$)

Primitives de fonctions composées

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

♥♥♥

f est définie par $f =$	Les primitives de f sur I sont définies par F	Condition sur u
$u'u^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + k$ $k \in \mathbb{R}$	aucune
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + k$ $k \in \mathbb{R}$	u ne s'annule pas sur I.
$\frac{u'}{u^n}$ $(n \in \mathbb{N} - \{1\})$	$\frac{u^{-n+1}}{-n+1} + k$, $k \in \mathbb{R}$	u ne s'annule pas sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$, $k \in \mathbb{R}$	u à valeurs strictement ⊕ sur I. $\forall x \in I$; $u(x) > 0$
♥♥♥ $\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u \rvert) + k$ où $k \in \mathbb{R}$ $\ln(u) + k$	u ne s'annule pas sur I u à valeurs strictement ⊕ sur I
♥♥♥ $u'e^u$	$e^u + k$ où $k \in \mathbb{R}$	aucune
$u' \cos(u)$	$\sin(u) + k$ où $k \in \mathbb{R}$	aucune
$u' \sin(u)$	$-\cos(u) + k$ où $k \in \mathbb{R}$	aucune

♥♥♥

Exercice 7

Trouver la bonne réponse pour chacune des deux questions suivantes :

1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2}$.

La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = 1$ est définie par :

a. $F(x) = \frac{x^2}{2}e^{x^2}$; ✗ car $F(0) = 0$

b. $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ ✗ $F(0) = \frac{1}{2}$

c. $F(x) = (1+2x^2)e^{x^2}$;

d. $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{2}$

2.

On considère la fonction f définie sur $]-1\,;\,1[$ par

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

Une primitive de la fonction f est la fonction g définie sur l'intervalle $]-1\,;\,1[$ par :

a. $g(x) = -\frac{1}{2}\ln\overbrace{(1-x^2)}^{u(x)}$

b. $g(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$

c. $g(x) = \frac{x^2}{2\left(x-\frac{x^3}{3}\right)}$

d. $g(x) = \frac{x^2}{2}\ln(1-x^2)$

1) $f(x) = xe^{x^2}$ $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$ $(u'e^{u(x)})$ $(P(u'e^u) = e^u)$

$F(x) = \frac{1}{2}e^{x} + K$ où $K \in \mathbb{R}$.

$F(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^0 + K = 1 \Leftrightarrow K = \frac{1}{2}$

$F(x) = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}$: réponse D

2) $g(x) = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$ $\left(\ln(u)' = \frac{u'}{u}\right)$

$g'(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{(-2x)}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2} = f(x)$

Exercice 8 (*C'est reparti pour un moment de délicatesse*).

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, sans se préoccuper de l'intervalle sur lequel elle y est définie :

$f(x) = 2x(x^2+1)^3$; $g(x) = \frac{4x}{x^2+1}$; $h(x) = -2xe^{-x^2}$; $i(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$; $j(x) = \frac{5}{\sqrt{2x+1}}$

$k(x) = \sin(x) + 3\cos(2x)$; $l(x) = e^{-x} - 2e^{\frac{x}{5}}$; $m(x) = e^{2x} + 1 + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$.

$n(x) = \frac{\ln(x)}{x}$; $p(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$; $q(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+1}}$; $r(x) = \frac{e^{4x}}{e^{4x}+1}$

$s(x) = \frac{3x-5}{x+5}$ où $x > -5$.

- $f(x) = 2x\,(x^2+1)^3$ Posons $\begin{cases} u(x) = x^2+1 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$

$f(x) = u'(x) \times (u(x))^3$

Donc : $F(x) = \dfrac{(u(x))^4}{4} = \dfrac{(x^2+1)^4}{4}$

- $g(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$ Posons : $\begin{cases} u(x) = x^2+1 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$

$\Longrightarrow g(x) = 2 \times \dfrac{2x}{x^2+1} = 2 \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Donc : $G(x) = 2 \times \ln(|x^2+1|) = 2\ln(x^2+1)$ car $x+1 \geqslant 1 > 0$

- $h(x) = -2x\,e^{-x^2}$ Posons $\begin{cases} u(x) = -x^2 \\ u'(x) = -2x \end{cases}$

$h(x) = u'(x)\,e^{u(x)}$

Donc : $H(x) = e^{u(x)} = e^{-x^2}$

- $i(x) = \dfrac{1}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}$ Posons : $\begin{cases} u(x) = \frac{1}{x} \\ u'(x) = -\frac{1}{x^2} \end{cases}$

Donc $i(x) = -\left(\dfrac{-1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} = -u'(x)\,e^{u(x)}$

$I(x) = -e^{u(x)} = -e^{\frac{1}{x}}$

- $j(x) = \dfrac{5}{\sqrt{2x+1}} = \dfrac{5}{\sqrt{u(x)}}$ où $\begin{cases} u(x) = 2x+1 \\ u'(x) = 2 \end{cases}$

$j(x) = \dfrac{5}{2} \times \dfrac{2}{\sqrt{u(x)}} = \dfrac{5}{2} \times \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

Donc : $J(x) = \dfrac{5}{2} \times 2\sqrt{u(x)} = 5\sqrt{2x+1}$

- $k(x) = \sin(x) + 3\cos(2x)$

$K(x) = -\cos(x) + 3\dfrac{\sin(2x)}{2}$

$K(x) = -\cos(x) + \dfrac{3}{2}\sin(2x)$

- $\ell(x) = e^{-x} - 2e^{\frac{x}{5}}$ ↙ Type Bac

$L(x) = \dfrac{e^{-x}}{-1} - 2\,\dfrac{e^{\frac{x}{5}}}{\frac{1}{5}} = -e^{-x} - 10e^{\frac{x}{5}}$

- $m(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{1}{x} \times \ln(x)$ $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ u'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

$m(x) = u(x) \times u'(x)$

$N(x) = \dfrac{(u(x))^2}{2} = \dfrac{(\ln(x))^2}{2}$

- $p(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$ $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ u'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

$\rightarrow p(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{\ln(x)} = u'(x) \times \dfrac{1}{u(x)}$

$= \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Donc $P(x) = \ln(|u(x)|)$

$P(x) = \ln(|\ln(x)|)$

On commencera par établir que pour tout réel $x > -5$: $s(x) = a + \frac{b}{x+5}$ où a et b sont deux réels que l'on déterminera.

$t(x) = x^2(\frac{x^3}{3}+1)$; $\beta(x) = e^{-x}\sin(e^{-x})$; $\gamma(x) = x^2\cos(x^3)$

D'autres techniques de calcul de primitive existent et seront vues dans le chapitre calcul intégral, mais il faut ***bien être conscient, qu'arriver à déterminer des primitives*** d'une fonction donnée ***est un luxe***, et que bien souvent, ***on ne sait pas*** exprimer à l'aide des fonctions usuelles des primitives de fonctions simples, comme par-exemple : $f(x) = e^{-x^2}$.

Calculer des primitives devient vite addictif. En calculer une centaine, en guise de loisir, permet, entre autres, de devenir rapide. Il y en a plein dans votre livre. Au travail !

- $q(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+1}} = \frac{2x+3}{\sqrt{u(x)}}$ $\quad u(x) = x^2+3x+1$; $u'(x) = 2x+3$

$q(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

Donc : $Q(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{x^2+3x+1}$

- $m(x) = e^{2x} + 1 + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$ $\longrightarrow$ * $\begin{cases} u(x) = x+1 \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ $\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$

$M(x) = \frac{e^{2x}}{2} + x + {}^{**}\ln(x^2+1) + \ln(|x+1|) - {}^{*}\frac{1}{x+1}$ $\quad P\left(\frac{u'}{u^2}\right) = \frac{-1}{u}$

** $\begin{cases} u(x) = x^2+1 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$ $\frac{2x}{x^2+1} = \frac{u'}{u}$

- $r(x) = \frac{e^{4x}}{e^{4x}+1}$ Soit $\begin{cases} u(x) = e^{4x}+1 \ (>0) \\ u'(x) = 4e^{4x} \end{cases}$

- $r(x) = \frac{1}{4} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$ $\quad P\left(\frac{u'}{u}\right) = \ln(|u|)$ Si $u > 0$

Donc : $R(x) = \frac{1}{4}\ln(|4x|) = \frac{1}{4}\ln(e^{4x}+1)$

- $s(x) = \frac{3x-5}{x+5}$; $x > -5$

$\boxed{M_1}$: $s(x) = \frac{3x-5}{x+5} = \frac{3x+15-20}{x+5}$

$\left(\begin{matrix} a=3 \\ b=-20 \end{matrix}\right)$ $\quad s(x) = \frac{3x+15}{x+5} - \frac{20}{x+5} = 3 - \frac{20}{x+5}$

Donc : $S(x) = 3x - 20 \times \ln(x+5)$

$\boxed{M_2}$: $a + \frac{b}{x+5} = \frac{a}{1} + \frac{b}{x+5}$
$= \frac{a(x+5)}{x+5} + \frac{b}{x+5}$
$= a + \frac{b}{x+5} = \frac{ax+5a+b}{x+5}$

Ainsi : $s(x) = a + \frac{b}{x+5}$
$\Updownarrow$
$\frac{3x-5}{x+5} = \frac{ax+5a+b}{x+5}$

$3x - 5 = ax + 5a + b$

Donc $\begin{cases} a = 3 \\ 5a + b = -5 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 3 \\ b = -5-5\times 3 = -20 \end{cases}$

Donc $s(x) = 3 - \frac{20}{x+5}$ $\Rightarrow$

- $\lambda(x) = \frac{-2x+7}{x-11} = a + \frac{b}{x-11}$ $\begin{cases} a = -2 \\ b = -15 \end{cases}$

- $t(x) = x^2\left(\frac{x^3}{3}+1\right)$

$t(x) = \frac{x^5}{3} + x^2$ Donc $T(x) = \frac{1}{3} \times \frac{x^6}{6} + \frac{x^3}{3}$

$T(x) = \frac{x^6}{18} + \frac{x^3}{3} = \frac{x^6+6x^3}{18}$

On commencera par établir que pour tout réel $x > -5$: $s(x) = a + \frac{b}{x+5}$ où a et b sont deux réels que l'on déterminera.

$t(x) = x^2(\frac{x^3}{3}+1)$; $\beta(x) = e^{-x}\sin(e^{-x})$; $\gamma(x) = x^2\cos(x^3)$

D'autres techniques de calcul de primitive existent et seront vues dans le chapitre calcul intégral, mais il faut ***bien être conscient, qu'arriver à déterminer des primitives*** d'une fonction donnée ***est un luxe***, et que bien souvent, ***on ne sait pas*** exprimer à l'aide des fonctions usuelles des primitives de fonctions simples, comme par-exemple : $f(x) = e^{-x^2}$.

Calculer des primitives devient vite addictif. En calculer une centaine, en guise de loisir, permet, entre autres, de devenir rapide. Il y en a plein dans votre livre. Au travail !

- $q(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+1}} = \frac{2x+3}{\sqrt{u(x)}}$

$u(x) = x^2+3x+1$
$u'(x) = 2x+3$

$q(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

Donc : $Q(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{x^2+3x+1}$

- $m(x) = e^{2x} + 1 + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \longrightarrow \begin{cases} u(x) = x+1 \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ * ; $\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$

$M(x) = \frac{e^{2x}}{2} + x + {}^{**}\ln(x^2+1) + \ln(|x+1|) - {}^{*}\frac{1}{x+1}$

$P\left(\frac{u'}{u^2}\right) = \frac{-1}{u}$

- $r(x) = \frac{e^{4x}}{e^{4x}+1}$ Soit $\begin{cases} u(x) = e^{4x}+1 \ (>0) \\ u'(x) = 4e^{4x} \end{cases}$

** $\begin{cases} u(x) = x^2+1 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$ $\frac{2x}{x^2+1} = \frac{u'}{u}$

$P\left(\frac{u'}{u}\right) = \ln(|u|)$
Si $u>0$

- $r(x) = \frac{1}{4} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$

Donc : $R(x) = \frac{1}{4}\ln(|u(x)|) = \frac{1}{4}\ln(e^{4x}+1)$

- $s(x) = \frac{3x-5}{x+5}$; $x > -5$

$\boxed{M1 :}$ $s(x) = \frac{3x-5}{x+5} = \frac{3x+15-20}{x+5}$

$\begin{pmatrix} a=3 \\ b=-20 \end{pmatrix}$ $s(x) = \frac{3x+15}{x+5} - \frac{20}{x+5} = 3 - \frac{20}{x+5}$

Donc : $S(x) = 3x - 20\times\ln(x+5)$

$\boxed{M2 :}$ $a + \frac{b}{x+5} = \frac{a}{1} + \frac{b}{x+5}$
$= \frac{a(x+5)}{x+5} + \frac{b}{x+5}$
$= a + \frac{b}{x+5} = \frac{ax+5a+b}{x+5}$

Ainsi : $s(x) = a + \frac{b}{x+5}$
$\Updownarrow$
$\frac{3x-5}{x+5} = \frac{ax+5a+b}{x+5}$
$3x-5 = ax+5a+b$

Donc $\begin{cases} a=3 \\ 5a+b=-5 \end{cases}$ $\begin{cases} a=3 \\ b=-5-5\times3=-20 \end{cases}$

Donc $s(x) = 3 - \frac{20}{x+5}$

- $\lambda(x) = \frac{-2x+7}{x-11} = a + \frac{b}{x-11}$ $\begin{cases} a=-2 \\ b=-15 \end{cases}$

- $t(x) = x^2\left(\frac{x^3}{3}+1\right)$

$t(x) = \frac{x^5}{3} + x^2$ Donc $T(x) = \frac{1}{3}\times\frac{x^6}{6} + \frac{x^3}{3}$

$T(x) = \frac{x^6}{18} + \frac{x^3}{3} = \frac{x^6+6x^3}{18}$

$\Longrightarrow$

Exercice 9

f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et F une primitive de f. On suppose que F ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(-x) + f(3x+1) + \frac{f(x)}{F(x)}$.

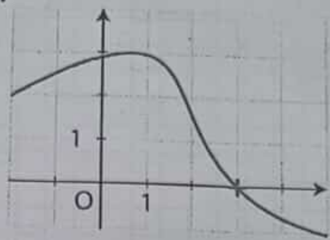
$x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(-x) + f(3x+1) + \frac{f(x)}{F(x)}$

$\frac{f}{F}$ de la forme : $\frac{u'}{u}$

$\Rightarrow G(x) = -F(-x) + \frac{F(3x+1)}{3} + \ln(|F(x)|)$

Exercice 10 BAC (type V/F ou QCM)

f est la fonction définie sur $[-2\,;5]$ par la courbe tracée dans ce repère.
Déterminer le sens de variation d'une primitive de f sur l'intervalle $[-2\,;5]$.

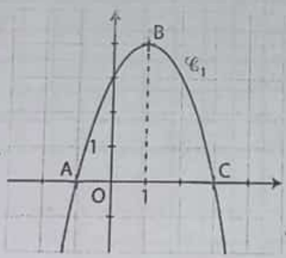


- F croît sur I si $F' = f$ est positive sur I

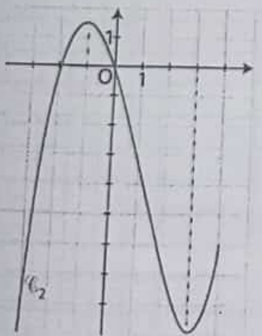
x	-2		3		5
$f(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

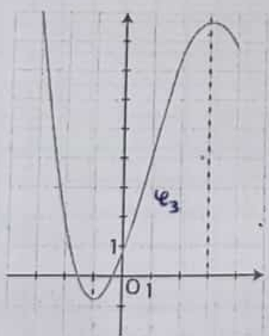
Exercice 11

f est une fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;4]$.
Les points $A(-1\,;0)$, $B(1\,;4)$ et $C(3\,;0)$ appartiennent à la courbe représentative de f donnée ci-contre.



Parmi les deux courbes suivantes, laquelle est la représentation graphique d'une primitive de la fonction f ?





x	-3		-1		3		4
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

$\mathscr{C}$ est $\mathscr{C}_3$ qui est une représentation de F.

$f(x) = e^{-x}\sin(e^{-x})$ Posons $\begin{cases} u(x) = e^{-x} \\ u'(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$f(x) = -(-e^{-x})\sin(e^{-x}) = -u'(x)\sin(u(x))$

Donc $F(x) = \cos(u(x)) = \cos(e^{-x})$

$g(x) = x^2\cos(x^3)$ Posons $u(x) = x^3$, $u'(x) = 3x^2$

$g(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 \times \cos(x^3)$

$= \frac{1}{3} u'(x)\cos(u(x))$

Donc : $G(x) = \frac{1}{3}\sin(u(x)) = \frac{\sin(x^3)}{3}$

II – Equations différentielles

A- Généralités

Définition

Une équation différentielle est une équation faisant intervenir une fonction f dérivable ainsi que sa dérivée (ou ses dérivées successives).

Remarque : le terme différentiel indique la présence de dérivées.

Exemples

Voici quelques équations différentielles :

$f'(x) + 2f(x) = 0$; * $f'(x) + f(x) = 5$ ** $f''(x) + 2f'(x) - f(x) = 3e^x$

ou encore : $f'(x) = 4f(x)$; $f'(x) = -2f(x) + x$.

En règle générale, en mathématiques, on note y la fonction inconnue, sans faire figurer la variable x.

Ainsi, l'équation différentielle : $f'(x) + 2f(x) = 0$ s'écrira aussi : $y' + 2y = 0$. !!

Ecrire avec la nouvelle notation la seconde équation différentielle citée plus haut :

* $y' + y = 5$ ** $y'' + 2y' - y = 3e^x$

Remarque

En physique, on noterait plutôt au lieu de $f'(x) + 2f(x) = 0$: $\dfrac{df(x)}{dx} + 2f(x) = 0$.

De même, au lieu de : $y'' + 5y' + 2y = 0$, on noterait : $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2} + 5\dfrac{df(x)}{dx} + 2f(x) = 0$.

Le terme $\dfrac{df(x)}{dx}$ signifiant $f'(x)$ et $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$ signifiant $f''(x)$.

Notons qu'historiquement, on notait ainsi la dérivée.

En mécanique, la dérivée d'une fonction f est encore notée : $\dot{f}$, la dérivée seconde de f est notée : $\ddot{f}$

En classe de terminale, on va s'intéresser à deux types d'équations différentielles seulement :

→ dérivée proportionnelle à la fonction.

- L'équation différentielle : $y' = ay$ où a est un réel donné.
- L'équation différentielle : $y' = ay + b$, où a et b sont deux réels donnés.

Ces équations sont appelées ***équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants.***

Définition

Résoudre une équation différentielle sur un intervalle I, c'est déterminer ***toutes les fonctions dérivables sur I*** qui vérifient l'équation différentielle de départ.

Par exemple, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y' = 2y$, c'est trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout réel x, on ait : $f'(x) = 2f(x)$.

Attention, quand on vous demande de résoudre une équation différentielle, on ne vous demande pas de trouver une valeur de x, mais une fonction f!!!

Exemple

a) Résoudre sur $]0 ; +\infty[$ l'équation différentielle : $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

b) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' = x$.

c) Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x^2}$ est solution de l'équation différentielle : $y' + 2xy = 0$.

d) Vérifier également que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = cos(x) + sin(x)$ est solution de : $y' + y = 2cos(x)$.

a) $x>0$ et $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$y = \sqrt{x} + k \; ; \; k \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l}]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} + k \; ; \; k \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \quad (x \longmapsto f(x))$$

$\mathcal{S}$ est ici un ensemble de fonctions

b) $y' = x \longrightarrow \left(\begin{array}{l} f'(x) = x \\ f(x) = \frac{x^2}{2} + k \end{array} \right)$

$y = \frac{x^2}{2} + k \; ;$ où $k \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x^2}{2} + k \; ; \; k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

c) $f(x) = e^{-x^2}$

dérivée d'une composée.

→ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -2x e^{-x^2}$

Donc : $f'(x) + 2x f(x) = -2xe^{-x^2} + 2xe^{-x^2} = 0$

Donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de $y' + 2xy = 0$

d) $g(x) = \cos(x) + \sin(x)$

g solut° de $y' + y = 2\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$ signifie : $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; g'(x) + g(x) = 2\cos(x)$

Or $g(x) = \cos(x) + \sin(x)$

$g'(x) = -\sin(x) + \cos(x)$

Donc $g'(x) + g(x) = -\sin(x) + \cos(x) + \cos(x) + \sin(x)$

$g'(x) + g(x) = 2\cos(x)$

Donc g est solution de $y' + y = 2\cos(x)$

B – Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$, où a est un réel donné.

Notons (E) l'équation différentielle : $y' = ay$.

Théorème XL

Soit $a \in \mathbb{R}$. Les solutions de l'équation (E) : $y' = ay$ sont exactement les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ke^{ax} \ldots \text{ où } k \text{ est un réel quelconque.}$$

Concrètement, les solutions de (E) sont les "*multiples réels*" de la fonction : $x \rightarrow \ldots$

Preuve :

Notons $S_{(E)}$ l'ensemble des solutions de (E).

Soit $\Omega = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to ke^{ax} \text{ où } k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$.

On doit établir que $S_{(E)} = \Omega$.

On procède par double inclusion : Mq $S(E) \subset \Omega$ et $\Omega \subset S(E)$

$\Rightarrow$ (E) $y' = ay$

② Mq $\Omega \subset S(E)$: Soit $f \in \Omega$: $\exists k \in \mathbb{R}$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ke^{ax}$

Donc $f'(x) = k \times ae^{ax}$

$f'(x) = a \times \underbrace{ke^{ax}}_{f(x)} = af(x)$

Donc : $y' = ay$

$f \in S(E)$ $\boxed{\text{Donc } \Omega \subset S(E)}$

① Mq $S(E) \subset \Omega$: Soit $f \in S(E)$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = af(x)$ ⊛

But $f(x) = ke^{ax}$

$f(x)e^{-ax} = k$

Nommons g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\underbrace{g(x) = f(x)e^{-ax}}$

But : Mq g est constante sur $\mathbb{R}$

- g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit et composée)

$\forall x \in \mathbb{R}$; $g'(x) = f'(x)e^{-ax} + f(x) \times (ae^{-ax})$

$g'(x) = \underbrace{f'(x)e^{-ax}}_{⊛} - af(x)e^{-ax}$

$g'(x) = af(x)e^{-ax} - af(x)e^{-ax} = 0$

Donc g est constante sur $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$: $\exists k \in \mathbb{R}$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $\underbrace{g(x)}_{\hookrightarrow \text{ définit}^\circ \text{ de } g} = k$

- $f(x)e^{-ax} = k$

$f(x) = \dfrac{k}{e^{-ax}}$ car $e^{-ax} \neq 0$

$f(x) = ke^{ax}$ $\quad \hookrightarrow \dfrac{1}{e^{\beta}} = e^{\beta}$

Donc $f \in \Omega$ et $S(E) \subset \Omega$

Ainsi : $\Omega = S(E)$

Exercice 12

a) Résoudre l'équation différentielle suivante : $y' = 2y$.

b_1) Résoudre l'équation différentielle : $2y'+3y = 0$.

b_2) Déterminer la fonction f solution de la précédente équation différentielle telle que $f(2) = 1$.

c) Déterminer la solution f définie sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle : $y' + \frac{1}{4}y = 0$ et $f(3) = -1$.

a) $y' = 2y$ est de la forme : $y' = ay$ avec $a = 2$

• D'après le cours : les fonctions f solution de cette équation différentielle sont définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ke^{2x}$

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto ke^{2x} \, ; \, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

b) 1) $2y' + 3y = 0$

$2y' = -3y$

$\underbrace{y' = -\frac{3}{2}y}_{\text{forme résolue du type } y' = ay \text{ où } a = -\frac{3}{2}}$

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto ke^{-\frac{3}{2}x} \, ; \, k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

b) 2) f est solution de (E) donc d'après b_1 : $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ke^{-\frac{3}{2}x}$

$f(2) = 1 \Leftrightarrow ke^{-\frac{3}{2}\times 2} = 1 \Leftrightarrow ke^{-3} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{e^{-3}} = e^3$

$\boxed{f(x) =} \, e^3 \times e^{-\frac{3}{2}x} = \boxed{e^{-\frac{3}{2}x+3}}$

c) (E) : $y' + \frac{1}{4}y = 0$ et $f(3) = -1$

$y' = \frac{-1}{4}y$ où $a = \frac{1}{4}$

Donc $f(x) = ke^{-\frac{1}{4}x}$, $k \in \mathbb{R}$

$f(3) = -1 \Leftrightarrow ke^{-\frac{1}{4}\times 3} = -1$

$ke^{-\frac{3}{4}} = -1$

$k = -\frac{1}{e^{-\frac{1}{4}}} = -1 \times e^{\frac{3}{4}} = e^{\frac{3}{4}}$ et $f(x) = -e^{\frac{3}{4}} \times e^{-\frac{1}{4}x}$

$\boxed{f(x) = e^{-\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}}}$

⚠ Pour pouvoir appliquer le théorème *XL*, il faut que l'équation différentielle soit écrite sous la forme : $y' = ay$ (on dit qu'elle est écrite sous forme résolue).

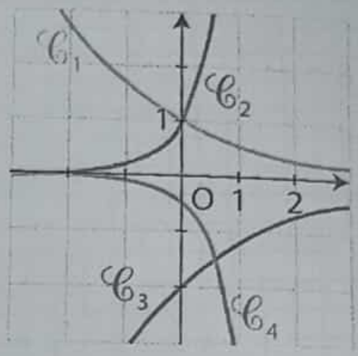
Si on a une équation différentielle de la forme : $ay' + by = 0$, où a est un réel non nul et b est un réel quelconque, on ***commencera toujours par écrire l'équation différentielle sous forme résolue*** : nécessité d'isoler y' avant d'appliquer le théorème *XL* !

Le théorème XL, nous permet-il de résoudre l'équation différentielle $x^2y' + 3y = 0$?
Pourquoi ? Non car pas du type : $y' = ay$ où a est constante !!! Pour $x \neq 0$: $y' = \underbrace{-\frac{3}{x^2}}_{\text{non constant !}} y$

Exercice 13

68 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5e^{-4x}$.
Déterminer l'équation différentielle de la forme $y' = ay$ dont f est une solution sur $\mathbb{R}$.

69 Dans ce repère, les courbes représentent des solutions d'équations différentielles du type $y' = ay$. Associer chacune de ces courbes à l'équation différentielle $(\mathbf{E_1}) : y' = 2y$ ou $(\mathbf{E_2}) : y' + 0{,}5y = 0$.



$\boxed{68}$ $f(x) = 5e^{-4x}$ est solution de $y' = ay$ lorsque $a = -4$

$f'(x) = -20e^{-4x} = -4f(x)$ $\quad y' = -4y$

$\boxed{69}$ (E_1) $y' = 2y$: $S_{(E_1)}$ $f(x) = ke^{2x}$; $k \in \mathbb{R} \longrightarrow f(0) = k$

(E_2) $y' + 0{,}5y = 0$: $S_{(E_2)}$ $f(x) = ke^{-0{,}5x}$; $k \in \mathbb{R} \longrightarrow f(0) = k$
$y' = -0{,}5y$

$\mathscr{C}_1$: $f(x) = \left| \begin{array}{l} e^{2x} \\ e^{-0{,}5x} \end{array} \right.$; exclue car $x \longmapsto e^{2x}$ croît sur $\mathbb{R}$ $\quad \mathscr{C}_1 \to (E_2)$

$\mathscr{C}_2$: $f(x) = \left| \begin{array}{l} e^{2x} \\ e^{-0{,}5x} \end{array} \right.$ ($k=1$) : exclue car $\left| \begin{array}{l} x \longmapsto e^{-0{,}5x} \\ \text{ou } \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-0{,}5x} = 0 \end{array} \right.$ $\quad \mathscr{C}_2 \to (E_1)$

$f(0) = -2$
donc $k = -2$

$\mathscr{C}_3$: $f(x) = \left| \begin{array}{l} -2e^{2x} \\ -2e^{-0{,}5x} \end{array} \right.$ exclue car en $+\infty$ tend vers $-\infty$ (graphique) $\quad \mathscr{C}_3 \to (E_2)$

Propriété

> Soit (E) l'équation différentielle : $y' = ay$ où a est un réel.
> Soit x_0 et y_0 deux réels donnés.
>
> Il existe une ***UNIQUE*** solution de (E) notée f, telle que $f(x_0) = y_0$.

Remarque : la relation : $f(x_0) = y_0$ est appelée la condition initiale.

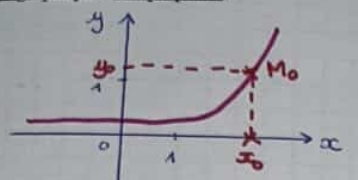
• f est solution de $y'=ay$ donc : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)=ke^{ax}$

Or $f(x)=y_0 \Leftrightarrow ke^{ax_0}=y_0 \Leftrightarrow k=\underbrace{\frac{y_0}{e^{ax_0}}}_{\neq 0}=y_0e^{-ax_0}$

Donc $f(x)=y_0e^{-ax_0}e^{ax}$

$\boxed{f(x)=y_0e^{a(x-x_0)}}$

Interprétation graphique de la propriété :



Une seule courbe de fonct. solution de (E) passe par $M_0(x_0;y_0)$

C – Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ où a et b sont deux réels donnés avec $a\neq 0$.

Définition

L'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$ (ou encore $y' - \overset{\text{2nd membre}}{ay = b}$) est appelée une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.

Théorème XXL : soit a et b deux réels avec $a\neq 0$.

♥♥♥♥

Soit (E) l'équation différentielle : $y' = ay+b$.

♥**Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ke^{ax}-\frac{b}{a}$ où $k\in\mathbb{R}$.**♥

Preuve : (E) : $y'=ay+b$

⇒ Étape 1 : On cherche une solution constante de (E)

• Soit c une fonction constante :

c est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ ssi : $\forall x\in\mathbb{R}$ $\underbrace{c'(x)}_{\shortparallel}=ac(x)+b$

$0=ac(x)+b$

$\boxed{c(x)=\frac{-b}{a}}$

⇒ Étape 2 : on cherche toutes les solutions de (E)

Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$:

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=af(x)+b$ L_1

Or $\forall x\in\mathbb{R}$, $c'(x)=ac(x)+b$ L_2

Donc L_1-L_2 : $f'(x)-c'(x)=af(x)+b-(ac(x)+b)$

$f'(x)-c'(x)=a(f(x)-c(x))$

$\underbrace{(f-c)'(x)=a\underbrace{(f-c)}(x)}_{y'=ay}$

$f-c$ est solution de (E') : $y'=ay$

Donc $\exists k\in\mathbb{R}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $(f-c)(x)=ke^{ax}$

$f(x)-c(x)=ke^{ax}$

$f(x)=ke^{ax}+c(x)$

$f(x)=ke^{ax}-\frac{b}{a}$

Exemple : Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y' = 3y + 4$. de la forme $y' = ay + b$ ou $\begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases}$

Remarque : en pratique, pour résoudre $y' = ay + b$, si vous oubliez la forme générale des solutions, ce qui peut arriver, résolvez d'abord $y' = ay$, puis cherchez une fonction constante solution de : $y' = ay + b$, appelée solution particulière de l'équation différentielle.

L'ensemble des solutions de $y' = ay + b$ est la somme des fonctions solutions de $y' = ay$ et de la fonction constante trouvée.
On vous expliquera ça post-bac, c'est la notion d'espaces affines et d'espace vectoriels…
En terminale, vous serez guidés, en particulier dans la recherche d'une solution particulière !

Remarque : Dans les exercices, le résultat ci-dessous, admis dans le cours, est fréquemment utilisé :
Lorsqu'on a une équation écrite sous la forme (E_0) : $y' + ay = 0$, on dit que c'est une équation différentielle dont le second membre est nul.

Lorsque l'équation est écrite sous la forme (E) : $y' + ay = b$ (b désigne une fonction, non nécessairement constante), on dit qu'on a une équation différentielle avec second membre (ici la fonction b est le second membre).

♥♥♥♥♥♥Les solutions de l'équation différentielle (E) sont exactement formées par les fonctions qui sont la somme des solutions de (E_0) et d'une solution particulière de (E), c'est-à-dire d'une fonction f qui vérifie : $f' + af = b$ sur l'intervalle d'étude.♥♥♥♥♥♥

Cela se comprend facilement, car si deux fonctions sont solutions de (E), alors leur différence est solution de (E_0).

Exercice 14

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y' + 2y = 1$.

Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ke^{3x} - \frac{4}{3}$

$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ke^{3x} - \frac{4}{3}, \ k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

Exercice 14 : $y' + 2y = 1$

$y' = -2y + 1$ de la forme : $y' = ay + b$

avec $\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$

Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ke^{-2x} - \frac{1}{-2} = ke^{2x} + \frac{1}{2}$

$k \in \mathbb{R}$

Exercice 15

On place une tasse de thé bouillante dans une pièce où la température est constante et égale à 20 °C. Selon la loi de refroidissement de Newton, la vitesse de refroidissement de la tasse est proportionnelle à la différence de la température de la tasse et la température de la pièce. On note $T(t)$ la température (en °C) de la tasse à l'instant t (exprimé en minute).
On suppose que $T(0) = 100$ et, d'après la loi de Newton, il existe une constante réelle k telle que $T'(t) = k(T(t) - 20)$.
1. Résoudre l'équation différentielle $y' = k(y - 20)$ et en déduire l'expression de $T(t)$ en fonction de k.
2. Au bout de 14 minutes, la température du thé est égale à 40 °C.
a. Démontrer que $k = \frac{-\ln(2)}{7}$.
b. Au bout de combien de temps la température du thé devient-elle inférieure à 25 °C ?

- $T(t)$ = température de la tasse a l'instant t.
- $T(t)$ en °C
- t en minutes

$\Rightarrow T(0) = 100$: à $t = 0$, la tasse est à 100 °C.

$T'(t) = k(T(t) - 20)$.

1) $y' = k(y-20)$

$y' = ky - k20$ de la forme $y' = ay + b$

avec $\begin{cases} a = k \\ b = -20k \end{cases}$

• Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $[0;+\infty[$ par $T(t) = \lambda e^{kt} - \frac{(-20k)}{k}$

$\boxed{T(t) = \lambda e^{kt} + 20}$; $\lambda \in \mathbb{R}$

• Ici : $T(0) = 100$

$\Updownarrow$

$\lambda \underbrace{e^{0}}_{1} + 20 = 100$

$\lambda = 80$ et $\boxed{T(t) = 80e^{kt} + 20}$

2) a) $T(14) = 40 \Leftrightarrow 80e^{14k} + 20 = 40$

$\Leftrightarrow 80e^{14k} = 20$

$\Leftrightarrow e^{14k} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4}$

$T(14) = 40 \Leftrightarrow \underbrace{\ln(e^{14k})} = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$

$\Leftrightarrow 14k = -\ln(4)$

$T(14) = 40 \Leftrightarrow k = \frac{-\ln(4)}{14} = \frac{-\ln(2^2)}{14}$

$\Leftrightarrow k = \frac{-2\ln(2)}{14} = \frac{-\ln(2)}{7}$

Ainsi : $\boxed{T(t) = 80e^{\frac{-\ln(2)}{7}t} + 20}$

b) $T(t) \leqslant 25$

$\Updownarrow$

$80e^{\frac{-\ln(2)}{7}t} + 20 \leqslant 25$

$80e^{\frac{-\ln(2)}{7}t} \leqslant 5$

$e^{\frac{-\ln(2)}{7}t} \leqslant \frac{5}{80}$

$e^{\frac{-\ln(2)}{7}t} \leqslant \frac{1}{16}$

Par croissance de ln sur $]0;+\infty[$:

$\frac{-\ln(2)}{7} t \leqslant \ln\left(\frac{1}{16}\right)$

$\frac{-\ln(2)}{7} t \leqslant -\ln(16)$ $\times(-1)$ or $-1<0$ = chgmt sens

$\frac{\ln(2)}{7} t \geqslant \ln(16)$

→ $16 = 2^4$ donc $\ln(16) = 4\ln(2)$

$\ln(2)t \geqslant 4\ln(2) \times 7$

$t \geqslant 28$ $(\ln(2) > 0)$

⟹ Au bout de 28 minutes la température du thé devient inférieure à 25°C.

Exercice 16

Soit (E) l'équation différentielle : $2y' + 3y = 6x + 1$.

a) Déterminer l'unique fonction affine g solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

b) Résoudre l'équation différentielle (E ') : $2y' + 3y = 0$.

c) En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

d) Déterminer l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que : $f(4) = 11$.

(E) : $2y' + 3y = 6x + 1$

a) g est une fonction affine solution de (E) donc :

$g(x) = cx + d$
$g'(x) = c$

g sol de (E) sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\,;\ 2g'(x) + 3g(x) = 6x + 1$

$\forall x \in \mathbb{R}\,;\ 2c + 3(cx + d) = 6x + 1$

$\forall x \in \mathbb{R}\,;\ \underbrace{3cx + 2c + 3d}_{\text{fonct° affine de la variable } x} = \underbrace{6x + 1}_{\text{fonct° affine.}}$

b) (E') : $2y' + 3y = 0$

$2y' = -3y$

$y' = \frac{-3}{2} y$ Forme : $y' = ay$ avec : $a = \frac{-3}{2}$

$\Rightarrow$ Les solutions de (E') sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{f(x) = ke^{-\frac{3}{2}x}\ ;\ k \in \mathbb{R}.}$$

c) D'après le cours ; les solutions de (E) sont les fonctions somme des solutions de (E') et d'une solution particulière de (E) (Ici la fonct° g)

$$\boxed{f(x) = ke^{-\frac{3}{2}x} + 2x - 1\ ;\ k \in \mathbb{R}}$$

d) $f(4) = 11 \Leftrightarrow ke^{-\frac{3}{2}\times 4} + 2\times 4 - 1 = 11$

$\Leftrightarrow ke^{-6} + 7 = 11$

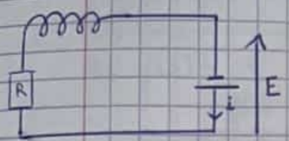
$\Leftrightarrow ke^{-6} = 4 \Leftrightarrow k = \frac{4}{e^{-6}} = 4e^{6}$

$f(x) = 4e^{6}e^{-\frac{3}{2}x} + 2x - 1$

$$\boxed{f(x) = 4e^{-\frac{3}{2}x + 6} + 2x - 1}$$

Exercice 17

Résoudre l'équation différentielle : $Li' + Ri = E$ (L, R et E sont des constantes physiques strictement positives) et sachant qu'à l'instant $t = 0$, l'intensité i est nulle.



i = fonction intensité dans le circuit

$$Li' + Ri = E \iff Li' = E - Ri$$

$$i' = \frac{E - Ri}{L}$$

$$i' = \frac{E}{L} - \frac{R}{L}i$$

$$\boxed{i' = \frac{-R}{L}i + \frac{E}{L}}$$

De la forme $y' = ay + b$

avec : $\begin{cases} a = -\frac{R}{L} \\ b = \frac{E}{L} \end{cases}$

(# cours de maths)

$$i(t) = ke^{-\frac{R}{L}t} - \frac{b}{a}$$

$$i(t) = ke^{-\frac{R}{L}t} - \frac{\frac{E}{L}}{\frac{-R}{L}}$$

$$\left[\frac{\frac{E}{L}}{\frac{R}{L}} = \frac{E}{L} \times \frac{L}{R} \right]$$

$$\boxed{i(t) = ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}}$$

Exercice 18

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.

La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

On souhaite décrire la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie au cours du temps avec un modèle continu. = fonction continue

Dans ce modèle, pour une durée t, en année, écoulée à partir du premier juillet 2024, la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie est donnée par $f(t)$, où f est une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ vérifiant :

- $f(0) = 1$; → condition initiale.
- f ne s'annule pas sur $[0\,;+\infty[$; $f(t) \neq 0$
- f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$;
- f est solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_1): \quad y' = 0{,}02y(15 - y).$$

On admet qu'une telle fonction f existe ; le but de cette partie est d'en déterminer une expression.

On note f' la fonction dérivée de f.

1. Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.

   Montrer que g est solution de l'équation différentielle

$$(E_2): \quad y' = -0{,}3y + 0{,}02.$$

1) $g(t) = \frac{1}{f(t)}$

$\begin{cases} \bullet\ g \text{ est sol de } (E_2) \text{ sur } [0 ; +\infty[\text{ signifie que} \\ \forall t \in [0 ; +\infty[\ ; \ g'(t) = -0{,}3t + 0{,}02 \end{cases}$

• Or $g(t) = \frac{1}{f(t)}$

$$g'(t) = \frac{-f'(t)}{f^2(t)}$$

Or f est solution de (E_1) donc : $\forall t \geqslant 0$; $f'(t) = 0{,}02\, f(t)(15 - f(t))$

$$f'(t) = 0{,}3\, f(t) - 0{,}02\, (f(t))^2$$

Donc $\frac{f'(t)}{f^2(t)} = \frac{0{,}3 f(t) - 0{,}02 (f(t))^2}{f^2(t)}$

$$\frac{f'(t)}{f^2(t)} = \frac{-0{,}3}{f(t)} - 0{,}02$$

Donc : $\underbrace{\frac{-f'(t)}{f^2(t)}}_{=} = \frac{-0{,}3}{f(t)} + 0{,}02$

$$g'(t) = -0{,}3 \times \underbrace{\frac{1}{f(t)}}_{= g(t) \text{ par déf de } g'} + 0{,}02$$

$\boxed{\begin{array}{l} g'(t) = -0{,}3\, g(t) + 0{,}02 : \\ g \text{ est donc solution de } (E_2) \end{array}}$

2. Donner les solutions de l'équation différentielle (E_2).
3. En déduire que pour tout $t \in [0 ; +\infty[$:

$$f(t) = \frac{15}{14\, e^{-0,3t} + 1}.$$

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
5. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'inéquation $f(t) > 14$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

2) $y' = -0{,}3y + 0{,}02$ est de la forme : $y' = ay + b$

avec : $\begin{cases} a = -0{,}3 \\ b = 0{,}02 \end{cases}$ • Les solutions de (E_2) sont les fonctions g définies sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(t) = ke^{-0{,}3t} - \frac{0{,}02}{-0{,}3}$$

$$g(t) = ke^{-0{,}3t} + \frac{0{,}02}{0{,}3} = ke^{-0{,}3t} + \frac{2}{30}$$

$$\boxed{g(t) = ke^{-0{,}3t} + \frac{1}{15}}$$

3) $g(t) = \frac{1}{f(t)} \Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{g(t)}$

$$f(t) = \frac{1}{ke^{-0{,}3t} + \frac{1}{15}}$$

Or $f(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{ke^{0} + \frac{1}{15}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{k + \frac{1}{15}} = 1 \Leftrightarrow k + 15 = 1 \Leftrightarrow k = \frac{14}{15}$

$$f(t) = \frac{1}{\frac{14}{15}e^{-0{,}3t} + \frac{1}{15}} = \frac{15}{14e^{-0{,}3t} + 1}$$

4) $f(t) = \frac{15}{14e^{-0{,}3t} + 1}$

$\lim\limits_{t \mapsto +\infty} -0{,}3t = -\infty$ et $\lim\limits_{X \mapsto -\infty} e^{X} = 0$ Donc par composée : $\lim\limits_{t \mapsto +\infty} e^{-0{,}3t} = 0$

Par produit et somme : $\lim\limits_{t \mapsto +\infty} (14e^{-0{,}3t} + 1) = 1$

Par quotient : $\lim\limits_{t \mapsto +\infty} f(t) = 15$

A long terme il y aura 15 ha recouverts de posidonie

5) $f(t) > 14$

$\frac{15}{14e^{-0{,}3t} + 1} > 14$

$15 > 14(\underbrace{14e^{-0{,}3t} + 1}_{*})$ car $* > 0$ car exp à valeurs positives

$15 > 196e^{-0{,}3t} + 14$

$196e^{-0{,}3t} < 1$

$e^{-0{,}3t} < \frac{1}{196}$

$\ln(e^{-0{,}3t}) < \ln\left(\frac{1}{196}\right)$ par $\nearrow$ de ln sur $]0; +\infty[$

$-0{,}3t < -\ln(196)$

Donc $0{,}3t > \ln(196)$

$t > \frac{\ln(196)}{0{,}3}$

$t > 17{,}6$

t en année Donc $t \geqslant 18$

Ce sera à partir de l'an $2024 + 18 = 2042$ que la surface de posidonie dépassera les 14 ha.

Exercice 19

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population de pandas roux qui semble en voie de disparition.
En 2020, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est 1 000.
Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2020).

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0\,;+\infty[$ et satisfait l'équation différentielle : (E) : $y' = -\frac{1}{20}\, y\,(3 - \ln(y))$.

1. Démontrer l'équivalence suivante : une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0\,;+\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0\,;+\infty[$, $f'(t) = -\frac{1}{20} f(t)\,(3 - \ln(f(t)))$ si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0\,;+\infty[$, $g'(t) = \frac{1}{20} g(t) - \frac{3}{20}$.
2. Résoudre l'équation différentielle (H) :
$$z' = \frac{1}{20} z - \frac{3}{20}.$$
3. En déduire l'expression de la fonction f.
4. Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à 20 individus ?

En 2020 : $t = 0$: 1000 pandas

$f(t)$ = nb de milliers de pandas en l'an $2020 + t$

$f(t) > 0$ sur $[0\,;+\infty[$ et f est solution de (E) : $y' = \frac{-1}{20} y(3 - \ln(y))$

1) $\forall t \in [0\,;+\infty[$; $f(t) = \frac{-1}{20} f(t)(3 - \ln(f(t)))$

Donc $\left\{ \frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{1}{20}(3 - \ln(f(t))) \right.$ car $f(t) > 0$

Soit g définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $g(t) = \ln(f(t))$

$$g'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

Donc : $g'(t) = -\frac{1}{20}(3 - g(t))$

$$\boxed{g'(t) = \frac{1}{20} g(t) - \frac{3}{20}}$$

2) (H) : $z' = \frac{1}{20} z - \frac{3}{20}$

(H) est de la forme : $z' = az + b$

avec : $a = \frac{1}{20}$ et $b = \frac{-3}{20}$

Donc $z(t) = k e^{\frac{1}{20}t} - \frac{b}{a}$

$z(t) = k e^{\frac{t}{20}} + 3$; $k \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{S}_{(H)} = \left\{ \begin{array}{l} [0\,;+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto k e^{\frac{t}{20}} + 3 \ ;\ k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

3) g est sol. de (H) donc :

$\exists k \in \mathbb{R}$; $\forall t \in [0\,;+\infty[$; $g(t) = k e^{\frac{t}{20}} + 3$

Or $g(t) = \ln(f(t))$; donc $\ln(f(t)) = k e^{\frac{t}{20}} + 3$

$f(t) = e^{ke^{\frac{t}{20}}+3}$

Or $f(0) = 1 \iff e^{ke^{0}+3} = 1$

$f(0) = 1 \iff e^{k+3} = e^{0} \iff k+3=0$

$f(0) = 1 \iff k = -3$

Donc $\boxed{f(t) = e^{-3e^{\frac{t}{20}}+3}}$

4) ⚠ $f(t)$ exprimé en milliers d'individus

20 individus $= 20\times 10^{-3} = 0{,}02$ milliers

Résolvons $f(t) < 0{,}02 \iff e^{-3e^{\frac{t}{20}}+3} < 0{,}02$

$\iff \ln\left(e^{-3e^{\frac{t}{20}}+3}\right) < \ln(0{,}02) \quad \left(= \ln\left(\frac{2}{100}\right) = \ln\left(\frac{1}{50}\right)\right)$

$\iff -3e^{\frac{t}{20}}+3 < -\ln(50)$

$\iff -3e^{\frac{t}{20}} < -3 - \ln(50)$

$\iff e^{\frac{t}{20}} > \frac{-3-\ln(50)}{-3}$

$\iff e^{t/20} > 1 + \frac{\ln(50)}{3}$

$\iff \frac{t}{20} > \ln\left(1+\frac{\ln(50)}{3}\right)$

$\iff t > \underbrace{20\ln\left(1+\frac{\ln(50)}{3}\right)}_{\approx 5{,}3}$ $\quad t \geqslant 6$ (entier)

- A partir de l'an 2026 (2020+6) la population sera inférieure à 20 individus

III – Des exercices de type bac

Exercice I

Soit l'équation différentielle notée (E) : $y' + 3y = e^{-3x}$

a) Montrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = xe^{-3x}$ est une solution de (E).

b) Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' + 3y = 0$.

c) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

$(E) : y' + 3y = e^{-3x}$ ↗ × constant

a) $u(x) = xe^{-3x}$ Mq : $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) + 3u(x) = e^{-3x}$

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit) et :

$u'(x) = 1\times e^{-3x} + x\times(-3e^{-3x}) = e^{-3x} - 3xe^{-3x}$

Donc $u'(x) + 3u(x) = e^{-3x} - 3xe^{-3x} + 3xe^{-3x}$

$\boxed{u'(x) + 3u(x) = e^{-3x}}$ u est bien solution de (E).

b) (E_0) : $y'+3y=0$

$y'=-3y$ de la forme : $y'=ay$ avec $a=-3$

Donc $\mathcal{S}_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ke^{-3x} \ ; k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

c) cf cours : les solutions de (E) sont la somme des solutions de (E_0) et d'une solution particulière de (E)

$\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \underbrace{ke^{-3x} + xe^{-3x}}_{(x+k)e^{-3x}} \ ; k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

Exercice II ***Juin 2024 Métropole, partie d'exercice.***

Alain décide de faire appel à un bureau d'études spécialisées. Celui-ci utilise un modèle continu pour décrire le taux de chlore dans la piscine.

Dans ce modèle, pour une durée x (en jours écoulés à compter du mercredi 19 juin), $f(x)$ représente le taux de chlore, en mg. L^{-1}, dans la piscine.
On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle

$$(E): \quad y' = -0{,}08y + \frac{q}{50}$$

où q est la quantité de chlore, en gramme, rajoutée dans la piscine chaque jour.

1. Justifier que la fonction f est de la forme $f(x) = C\mathrm{e}^{-0{,}08x} + \frac{q}{4}$ où C est une constante réelle.
2. a. Exprimer en fonction de q la limite de f en $+\infty$.
   b. On rappelle que le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à 0,7 mg.L^{-1}.
   On souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de 2 mg.L^{-1}.
   Déterminer les valeurs de C et q afin que ces deux conditions soient respectées.

$f(x)$ = taux de chlore en mg.L^{-1} au bout de x jours

f est sol de (E) : $y' = -0{,}08y + \frac{q}{50}$

q = quantité en grammes de chlore ajouté

1) $f(x) = Ce^{-0{,}08x} + \frac{q}{4}$

$f'(x) = -0{,}08Ce^{-0{,}08x} + 0$

$\boxed{f'(x) = -0{,}08Ce^{-0{,}08x}}$

Or $-0{,}08 f(x) + \frac{q}{50} = -0{,}08\left(Ce^{-0{,}08x} + \frac{q}{4}\right) + \frac{q}{50}$

$-0{,}08 f(x) + \frac{q}{50} = \underbrace{-0{,}08Ce^{-0{,}08x}}_{f'(x)} \cancel{- \frac{0{,}08q}{4}} \cancel{+ \frac{q}{50}}$

$\frac{0{,}08}{4} = 0{,}02 = \frac{1}{50}$

Donc f est sol de (E).

2)a) $f(x) = Ce^{-0,08x} + \frac{q}{4}$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} (-0,08x) = -\infty$
Or $\lim\limits_{X \mapsto -\infty} e^X = 0$
} Donc par composée : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^{-0,08x} = 0$

Par produit et somme : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \frac{q}{4}$

2)b) $f(0) = 0,7 \Leftrightarrow Ce^0 + \frac{q}{4} = 0,7$

$\Leftrightarrow C + \frac{q}{4} = 0,7$

$\underbrace{\lim\limits_{x \mapsto +\infty}}_{\text{à long terme}} f(x) = 2$

Donc d'après 2a) : $\frac{q}{4} = 2$

$q = 8$

$C = 0,7 - \frac{q}{4} = 0,7 - \frac{8}{4}$

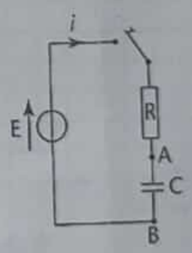
$C = 0,7 - 2 = -1,3$

$\boxed{f(x) = -1,3e^{-0,08x} + 2}$

IV – Quelques problèmes issus de la Physique faisant intervenir des équations différentielles

Exemple 1

Un circuit comprend un générateur de force électromotrice E, un dipôle (R, C) (association en série d'un condensateur de capacité C et d'un conducteur ohmique de résistance R) et un interrupteur.
À tout instant $t \geqslant 0$, en secondes :
- on note $i(t)$ l'intensité en ampères dans le circuit ;
- la charge $q(t)$ du condensateur et la tension $u(t)$ à ses bornes sont liées par la relation $q(t) = Cu(t)$;
- la tension aux bornes du générateur est égale à la somme des tensions aux bornes du générateur et de la résistance : $u(t) + Ri(t) = E$;
- la charge du condensateur et l'intensité du courant produit lors de la fermeture de l'interrupteur sont liées par la relation $i(t) = \frac{dq}{dt}(t) = q'(t)$.



1. Expression de $q(t)$

a) Expliquer pourquoi la charge q du condensateur est telle que $Rq' + \frac{1}{C}q = E$.

b) Résoudre cette équation différentielle.

c) On suppose que le condensateur est sans charge initiale, c'est-à-dire que : $q(0) = 0$. Exprimer $q(t)$ en fonction de t.

$i(t)$

$q(t) = C\,u(t)$ (0)

On a : $\boxed{u(t) + Ri(t) = E}$ (1)

$\boxed{i(t) = q'(t)}$ (2)

1) a) (1) avec $i(t) = q'(t)$ donne : $u(t) + Rq'(t) = E$

(0) donc $u(t) = \dfrac{q(t)}{C}$

Donc : $\dfrac{q(t)}{C} + Rq'(t) = E$

Donc : $\boxed{Rq' + \dfrac{1}{C} q = E}$

b) $Rq' + \dfrac{1}{C} q = E$

Isolons q' :

$$Rq' = -\frac{1}{C} q + E$$

$$q' = \frac{-\frac{1}{C} q + E}{R}$$

$\boxed{q' = -\dfrac{1}{RC} q + \dfrac{E}{R}}$ forme : $y' = ay + b$

où $\begin{cases} a = \dfrac{1}{RC} \\ b = \dfrac{E}{R} \end{cases}$ $\rightarrow y(t) = ke^{at} - \dfrac{b}{a}$

Donc (# cours) les solutions de (#) sont :

$$q(t) = ke^{-\frac{1}{RC} t} - \frac{\frac{E}{R}}{-\frac{1}{RC}} = ke^{-\frac{t}{RC}} + CE \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

c) $q(0) = 0 \iff ke^{0} + CE = 0$

$\iff k + CE = 0$

$\iff k = -CE$

Donc $q(t) = -CEe^{-\frac{t}{RC}} + CE$

$$\boxed{q(t) = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$

2. Interprétation de la constante de temps

a) Déterminer la charge finale Q du condensateur, il s'agit de la limite de la fonction q en $+\infty$.

b) On note $\tau = RC$. À quel pourcentage, arrondi à l'unité, de sa charge maximale Q le condensateur est-il chargé après une durée de charge égale à τ ? égale à 5τ ?

2) a) $\lim\limits_{t \to +\infty} q(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} CE\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

• $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{t}{RC}} = 0$ car $RC > 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ (composition)

Par somme et produit $\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} q(t) = CE}$

2) b) $\tau = RC$ $q(t) = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

Q = charge maxi $= CE$

$q(\tau) = CE\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}\right) = CE\left(1 - e^{-1}\right)$

$\frac{q(\tau)}{CE} = 1 - e^{-1} \approx 0,63$

Au bout d'un temps $t = \tau$, la batterie est chargée à 63% de sa charge maxi.

De m : $q(5\tau) = CE\left(1 - e^{-\frac{5\tau}{\tau}}\right) = CE\left(1 - e^{-5}\right)$

$\frac{q(5\tau)}{CE} = 1 - e^{-5} \approx 0,99$: chargée à 99% au bout de $t = 5\tau$

Exemple 2

Un chariot de masse 200 kg se déplace à partir d'une origine O sur une voie rectiligne et horizontale. $x(t)$ est la distance, en mètre, qui le sépare de l'origine en fonction du temps t, en seconde ($t \geqslant 0$).

D'après les lois de Newton, la fonction x vérifie $200x'' + 25x' = 50$ où x'' est la dérivée de la fonction dérivée x' par rapport au temps t.

1. Déterminer $x(0)$.

2. $v(t)$ est la vitesse du chariot à l'instant t et vérifie $v(t) = x'(t)$.

a) Démontrer que x vérifie $200x'' + 25x' = 50$ si, et seulement si, la fonction v vérifie $v' = -0,125v + 0,25$.

b) Résoudre sur $[0\,;+\infty[$ l'équation différentielle :

$$y' = -0,125y + 0,25.$$

$200x''(t) + 25x'(t) = 50 \Rightarrow$ eq. diff du second ordre.

1) $x(0) = 0$ car chariot à l'origine O à $t = 0$

2) $v(t) = x'(t)$ donc $v'(t) = x''(t)$

$200x''(t) + 25x'(t) = 50$

$\Updownarrow$

$200v'(t) + 25v(t) = 50$

$200v'(t) = -25v(t) + 50$

$v'(t) = \frac{-25}{200}v(t) + \frac{50}{200}$

$v'(t) = -0,125\,v(t) + 0,25$

Donc v est solution de l'E D : $\boxed{v' = -0,125\,v + 0,25}$

2) b) $y' = -0,125\,y + 0,25$

Forme : $y' = ay + b$ où $\begin{cases} a = -0,125 \\ b = 0,25 \end{cases}$

Donc $\boxed{y(t) = ke^{-0,125t} + 2 \text{ où } k \in \mathbb{R}}$ $\left(y(t) = ke^{at} + \frac{b}{a}\right)$

$\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ \begin{array}{l} [0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto ke^{-0,125t} + 2 \; ; \; k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

c) La vitesse initiale du chariot est supposée nulle, ainsi $v(0) = 0$.

Déterminer alors la vitesse $v(t)$ pour tout réel t.

d) Étudier la limite de v en $+\infty$ et interpréter le résultat.

3. a) Démontrer alors que la fonction x est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$x(t) = 2t - 16 + 16e^{-0,125t}.$$

b) Quelle est la distance, en m, parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ? *Arrondir au dixième.*

<u>Complément</u> : exercice 131 page 397 (équation différentielle du second ordre à coefficients constants).

2) c) $v(0) = 0$ et v est sol de (E) donc : $v(t) = ke^{-0,125t} + 2$

$v(0) = 0 \Leftrightarrow ke^0 + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -2$

Donc $\boxed{v(t) = -2e^{-0,125t} + 2}$

2) d) $\lim_{t \to +\infty} -0,125\,t = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

Donc par composée $\lim_{t \to +\infty} e^{-0,125t} = 0$

Par produit et somme : $\lim_{t \to +\infty} v(t) = 2$

$\Rightarrow$ À long terme la vitesse tend à être égale à 2 m/s.

3) a) $v(t) = x'(t)$

Donc $x(t)$ est une primitive de $v(t)$

$v(t) = -2e^{-0,125t} + 2$

Donc $x(t) = V(t) = \dfrac{-2e^{-0,125t}}{-0,125} + 2t + \lambda$

$$x(t) = 16e^{-0,125t} + 2t + \lambda \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Or $x(0) = 0 \Leftrightarrow 16e^{0} + 2 \times 0 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -16$

$$\boxed{x(t) = 16e^{-0,125t} + 2t - 16}$$

3) b) $x(30) = 16e^{-0,125 \times 30} + 2 \times 30 - 16 \approx 44,4$ m

Au bout de 30 sec le chariot aura parcouru 44,4 m.