Nota bene **:** ***Ce travail est à remettre pour le 05 Décembre.***

Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 2 à 4 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Les copies rendues en retard ne seront pas corrigées. Pas de copie individuelle

Exercice I

1) Encadrer au centième près : $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Encadrer à 10^{-4} près $\frac{1}{7}$.

2) Un cercle a pour rayon 10 mètres. Calculer la valeur exacte p du périmètre de ce cercle.
Quel encadrement de π faut-il prendre (préciser l'amplitude) pour obtenir un encadrement de p à $1cm$ près ?

Exercice II

Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse, en justifiant :

Affirmation 1 : " Si $x < \pi$, alors $x < 3{,}1$".

Affirmation 2 : " Si y appartient à $[0{,}8\ ;\ 2]$, alors y appartient à $[0{,}7\ ;\ 1]$".

Affirmation 3 : " L'ensemble $\mathbb{Z} \cap\ ]-1\ ;\ 0[$est composé d'un seul élément".
Remarque : $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des nombres entiers relatifs.

Affirmation 4 : "Il n'y a aucun décimal dans l'intervalle $]3{,}4\ ;\ 3{,}400001[$".

Affirmation 5 : *"Si $x > 1$, alors $x^3 > x$."*

Exercice III

1) Ecrire des inégalités vérifiées par les réels x dans chacun des cas suivants :

a) $x \in [0\ ;\ 1{,}5]$; *b)* $x \in]1{,}2\ ;\ +\infty[$; *c)* $x \notin [3\ ;\ +\infty[$

2) Dire à quel intervalle, le plus "petit possible" appartient le réel x dans chacun des cas suivants :
a) $1 < x \leq 3{,}4$; *b)* $x > 3$

3) Déterminer, dans chacun des deux cas, l'intersection et la réunion des intervalles I et J suivants :
a) $I = [12\ ;\ 15[$ et $J = [14\ ;\ 20]$.
b) $I =]-\infty\ ;\ -\pi]$ et $J =]-2\pi\ ;\ +\infty[$.

Exercice IV

I-Soit a un réel tel que : $-3 < a \leq 5$. Donner un encadrement le plus précis possible de :

i) $a + 7$; *ii)* $a - 5{,}2$; *iii)* $4a$; *iv)* $2a - 8$; *v)* $-4a + 1$; *vi)* $\frac{a-3}{7}$

II- Soit A, B et C trois réels strictement positifs tels que : $A > B > C$. Comparer $\frac{A}{B}$ et 1, puis $\frac{C}{B}$ et 1.

III- Sachant que : $1{,}4 \leq x \leq 3{,}2$ et que $-1 \leq y \leq 2$, encadrer le plus finement possible :

a) $x + y$; *b)* $2x + 3y$; *c)* $x - y$; *d)* $2x - 5y$

Exercice V

1) Résoudre les inéquations suivantes : $2x - 7 > 6 - (2x - 8)$; $4x - 2(6 + 2x) \leq 4 - 2(x - 11)$

2) Déterminer tous les <u>entiers relatifs</u> a tels que : $1 - a < 2a + 5 < 9 - a$.

3) Soit m un nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation d'inconnue x suivante : $mx - 2 > x + m$, en discutant selon les valeurs du réel m.

Exercice VI

Une entreprise emploie 270 hommes et 170 femmes.

L'entreprise envisage d'embaucher le même nombre de femmes que d'hommes.

Combien faut-il embaucher de personnes, au minimum, pour que le nombre de femmes soit au moins égal aux deux tiers du nombre d'hommes ? Justifier votre démarche.

Exercice VII

A l'aide d'un tableau de signes, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $(2x-1)(-x+5) > 0$ *b)* $\frac{2x+3}{3x-5} \geq 0$.

Exercice VIII

Un avion fait un aller-retour entre deux villes A et B, la ville B étant située à l'est de la ville A.

En l'absence de vent, la vitesse de l'avion est supposée constante et égale à V *km/h*.

Un vent de direction *ouest* vers *est* souffle en permanence de A vers B à la vitesse supposée constante de v *km/h* et $v < V$.

0) Exprimer en fonction de V et v la vitesse de l'avion lorsqu'il va de A vers B (aller), puis sa vitesse lorsqu'il va de B vers A (retour).

1) Soit d la distance $AB = BA$.

i) Exprimer, ***en l'absence de vent***, en fonction de d et V, quelle serait la durée totale t du vol de l'avion aller-retour.

ii) Exprimer, ***en présence de vent***, la durée T du vol aller-retour en fonction de d, V et v.

2) Sur un vol aller-retour, l'effet du vent est-il favorable ou défavorable au vol de l'avion ? On attend un raisonnement et des explications. ***<u>Indication</u>*** : Comparer les deux nombres obtenus à la question 1.

Cet exercice bonus et facultatif est à traiter sur deux DM : moyenne arithmétique, moyenne harmonique et moyenne géométrique pour ce DM, la suite pour le DM8.

1. Les diverses moyennes

❖ Moyenne arithmétique

1. Un élève a obtenu deux notes : 9 et 13. Quelle est sa moyenne ?

> La **moyenne arithmétique** de deux réels a et b est $m = \frac{a+b}{2}$.

2. Un élève a obtenu cinq notes : 7, 12, 9, 7, 11. Une sixième note est prévue.

a. Quelle doit être cette note pour avoir 10 de moyenne ? 11 de moyenne ?

b. Peut-il espérer avoir 12 de moyenne ?

3. Julien effectue un trajet à vélo de 2 heures. Il roule la première heure à une vitesse moyenne de 15 km/h puis la seconde heure à une vitesse moyenne de 19 km/h.

a. Quelle distance a-t-il parcourue sur les 2 heures ? En déduire la vitesse moyenne sur le trajet total.

b. Plus généralement, si l'on effectue deux trajets ayant la même durée, l'un à une vitesse moyenne V_1, l'autre à une vitesse moyenne V_2, montrer que la vitesse moyenne V sur l'ensemble du trajet est la moyenne arithmétique de V_1 et V_2.

❖ Moyenne harmonique

1. Julien, qui habite Carcassonne, décide l'aller à Bram à pied ; 20 km séparent les deux villes. Il couvre la distance à une vitesse de 4 km/h. Pour revenir à Carcassonne, il s'est fait prêter un vélo. Il effectue le trajet à une vitesse de 16 km/h.

a. Quelle est la longueur totale du trajet ?

b. Calculer le temps de l'aller, puis le temps du retour.

c. En déduire la vitesse moyenne sur l'aller-retour.

d. La vitesse moyenne est-elle la moyenne arithmétique des deux vitesses ?

e. Vérifier l'égalité : $\frac{1}{6{,}4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right)$.

La **moyenne harmonique** de deux réels a et b strictement positifs est le réel h défini par $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ ou $\frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
La moyenne harmonique de deux réels est donc l'inverse de la moyenne arithmétique de leur inverse.

2. Plus généralement, soit un trajet de D km, effectué à l'aller à une vitesse V_1 et au retour à une vitesse V_2.
Montrer que la vitesse sur l'aller-retour est donnée par la moyenne harmonique des deux vitesses V_1 et V_2, et ne dépend pas de D.

3. Montrer que $h = \frac{2ab}{a+b}$.

❖ Moyenne géométrique

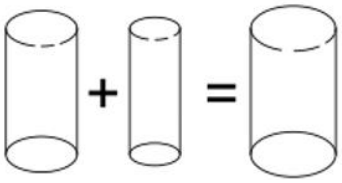
On considère un rectangle de côté 5 cm et 9,8 cm.
On veut construire un carré ayant la même aire que ce rectangle. Calculer la dimension d'un côté de ce carré.

La **moyenne géométrique** de deux réels a et b positifs est le réel $g = \sqrt{ab}$.

Plus généralement, montrer que le côté d'un carré ayant la même aire qu'un rectangle de côté a et b est la moyenne géométrique de a et b.

❖ Moyenne quadratique

1. (Problème des cordes). On possède deux cordes, l'une de rayon 1,2 cm, l'autre de rayon 2 cm.
On se demande quel devrait être le rayon d'une corde qui offrirait la même résistance que ces deux cordes, c'est-à-dire quel est le « rayon moyen » de ces cordes.



On conçoit que la résistance est proportionnelle à la section de la corde.

a. Calculer la section de chacune des cordes et en déduire que le rayon R de la corde cherché est $\sqrt{2{,}72}$.

La moyenne quadratique de deux réels a et b est : $q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

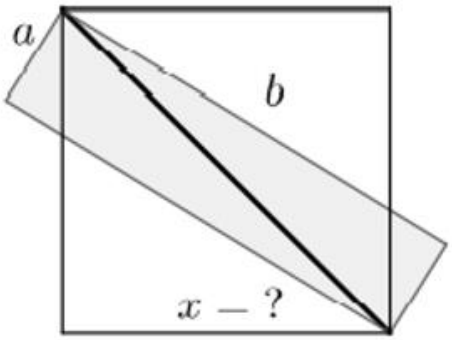
b. Montrer plus généralement que le rayon moyen de deux cordes de rayon R_1 et R_2 est la moyenne quadratique de ces rayons.

2. On considère un rectangle de côté a et b et un carré de côté x.

a. Quelle est la longueur des diagonales du rectangle et du carré ?

b. En déduire x pour que le rectangle et le carré ait les diagonales de même longueur.

c. Conclure en une phrase utilisant « moyenne quadratique ».



2. Comparaison des moyennes

Dans la suite on considère des réels a et b positifs avec $a \leq b$. Compléter le tableau suivant en arrondissant à 10^{-2} si nécessaire.

	a b	1 2	2 8	6 12	40 120	0,001 1000
Moyennes	géométrique g					
	harmonique h					
	arithmétique m quadratique q					

Émettre une conjecture sur le classement des réels a, b, g, h, m, q.

Méthodes de comparaison de deux nombres

On se donne deux nombres x et y et on veut savoir lequel des deux est le plus grand. On calcule la différence $x - y$,

- si $x - y \geq 0$ alors . . .
- si $x - y \leq 0$ alors . . .

a. On souhaite par exemple montrer que $a \leq m$. Compléter :

$$m - a = \frac{\quad}{2} - a = \frac{(\quad) -}{2} = \frac{\quad}{2}.$$

Or $b - a \geq 0$ car . . . Finalement $m - a$ . . . et donc . . .
Faire le même raisonnement pour prouver que $m \leq b$.

b. Montrer que $h - a = \frac{a(b-a)}{a+b}$. Donner le signe de chacun des trois termes intervenants : a, $b - a$ et $a + b$. En déduire le signe de $h - a$ et enfin que $a \leq h$.
Démontrer de même que $h \leq b$.

c. Calculer $g - a$. Quel problème rencontre-t-on pour étudier le signe ?

Méthodes de comparaison de deux nombres par leur carré

Il faut connaître la propriété suivante : deux réels positifs x et y sont classés dans le même ordre que leur carré.
Par exemple $\sqrt{7} < 3$ car $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$, $3^2 = 9$ et $7 < 9$.

Ainsi au lieu de comparer g et a, qui sont deux nombres positifs, on va comparer g^2 et a^2.
Montrer que $g^2 - a^2 = a(b - a)$. En déduire le classement de g^2 et a^2 puis de g et a.
Déterminer par la même méthode le classement de g et b.

d. Montrer que $q^2 - a^2 = \frac{(b-a)(b+a)}{2}$ et conclure sur le classement de q et a. Recommencer avec q et b.

Conclusion partielle : la moyenne de deux réels est toujours comprise entre ces deux réels.