Seconde 3 — Corrigé du DM10 — Avril 2022

(1)

Exercice I $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+4}{x^2-9}}=\sqrt{\dfrac{2x+4}{(x+3)(x-3)}}$

$f(x)$ est calculable si et seulement si $\dfrac{2x+4}{(x+3)(x-3)}\geqslant 0$ (rappel : $\sqrt{A}$ est calculable si et seulement si $A\geqslant 0$).

On va donc faire un tableau de signes de cette dernière expression :

$2x+4\geqslant 0$ équivaut à $2x\geqslant -4$ c'est à dire à $x\geqslant -\frac{4}{2}$ donc à $x\geqslant -2$

$x+3\geqslant 0$ équivaut à $x\geqslant -3$.

$x-3\geqslant 0$ équivaut à $x\geqslant 3$.

Par suite :

x	$-\infty$		-3		-2		3		$+\infty$
Signe de $2x+4$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f(x)=\frac{2x+4}{(x+3)(x-3)}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Donc $\dfrac{2x+4}{(x+3)(x-3)}\geqslant 0$ équivaut à : $-3<x\leqslant -2$ ou $3<x$.

Donc f est définie sur $\boxed{\mathcal{D}_f=]-3;-2]\cup]3;+\infty[}$

Exercice II

1) $f(x)=\dfrac{-x+5}{(2x+3)(x+1)}$

$f(x)$ est calculable lorsque $(2x+3)(x+1)\neq 0$.

Or $(2x+3)(x+1)=0$ équivaut à : $2x+3=0$ ou $x+1=0$

$x=-\frac{3}{2}$ ou $x=-1$.

Donc $\boxed{\mathcal{D}_f=\mathbb{R}-\{-\tfrac{3}{2};-1\}=]-\infty;-\tfrac{3}{2}[\cup]-\tfrac{3}{2};-1[\cup]-1;+\infty[}$.

2) On fait une fois de plus un tableau de signes :

$-x+5\geqslant 0$ équivaut à $5\geqslant x$ c'est à dire à $x\leqslant 5$.

$2x+3\geqslant 0$ équivaut à $x\geqslant -\frac{3}{2}$.

$x+1\geqslant 0$ équivaut à $x\geqslant -1$.

Par suite, on a :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		5		$+\infty$
Signe de $-x+5$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $2x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x)=\frac{-x+5}{(2x+3)(x+1)}$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

$f(x) \geqslant 0$ équivaut à : $x < -\frac{3}{2}$ ou $-1 < x \leq 5$.

donc $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty ; -\frac{3}{2}[\cup]-1 ; 5]}$.

3) $\mathcal{C}_f$ est situé AU-DESSUS de l'axe des abscisses lorsque $f(x) > 0$, donc (tableau précédent) sur

*) chacun des intervalles $]-\infty ; -\frac{3}{2}[$ et $]-1 ; 5[$.

**) $\mathcal{C}_f$ est situé AU-DESSOUS de l'axe des abscisses lorsque $f(x) < 0$, donc sur chacun des intervalles $]-\frac{3}{2} ; -1[$ et $]5 ; +\infty[$

***) $\mathcal{C}_f$ rencontre l'axe des abscisses lorsque $f(x) = 0$, donc en le point d'abscisse 5 et d'ordonnée 0.

4) facile !

Exercice III

$\frac{2}{x+5} > 3$ équivaut à : $\frac{2}{x+5} - 3 > 0$ ou encore à : $\frac{2}{x+5} - \frac{3}{1} > 0$ c'est à dire :

$\frac{2}{x+5} - \frac{3(x+5)}{x+5} > 0$ donc à : $\frac{2 - 3(x+5)}{x+5} > 0$ c'est à dire : $\frac{2 - 3x - 15}{x+5} > 0$.

On résout donc l'inéquation suivante : $\frac{-3x-13}{x+5} > 0$ à l'aide d'un tableau de signes :

OR $-3x - 13 \geqslant 0$ équivaut à : $-13 \geqslant 3x$ donc à $-\frac{13}{3} \geqslant x$ c'est à dire $x \leq -\frac{13}{3}$.

$x + 5 \geqslant 0$ équivaut à : $x \geqslant -5$.

Par suite, on a :

x	$-\infty$		-5		$-\frac{13}{3}$		$+\infty$
Signe de $-3x-13$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\frac{-3x-13}{x+5}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Conclusion : $\frac{-3x-13}{x+5} > 0$ équivaut à : $-5 < x < -\frac{13}{3}$: $\boxed{\mathcal{S} =]-5 ; -\frac{13}{3}[}$.

b) $\frac{x-7}{2x+11} \leqslant 1$ équivaut à : $\frac{x-7}{2x+11} - 1 \leqslant 0$ c'est à dire : $\frac{x-7}{2x+11} - \frac{(2x+11)}{2x+11} \leqslant 0$

c'est à dire $\frac{x-7-(2x+11)}{2x+11} \leqslant 0$ ou encore $\frac{x-7-2x-11}{2x+11} \leqslant 0$, c'est à dire : $\boxed{\frac{-x-18}{2x+11} \leqslant 0.}$

Faisons un tableau de signes de cette dernière expression :

$-x-18 \geqslant 0$ équivaut à : $-18 \geqslant x$ c'est à dire $x \leqslant -18$.

$2x+11 \geqslant 0$ équivaut à : $2x \geqslant -11$ c'est à dire : $x \geqslant -\frac{11}{2}$.

Donc

x	$-\infty$		-18		$-\frac{11}{2}$		$+\infty$
Signe de $-x-18$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $2x+11$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $\frac{-x-18}{2x+11}$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

Conclusion : $\frac{-x-18}{2x+11} \leqslant 0$ équivaut à : $x \leqslant -18$ ou $x > -\frac{11}{2}$.

$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty ; -18] \cup]-\frac{11}{2} ; +\infty[}$

Exercice 4

a) Pour tout réel x, $f(x) - g(x) = x^2 - (-x^2+x+1) = x^2 + x^2 - x - 1 = \underline{2x^2 - x - 1}$

Développons : $(x-1)(2x+1) = 2x^2+x-2x-1 = \underline{2x^2-x-1}$.

D'après le résultat précédent, $f(x)-g(x) = 2x^2-x-1$, de sorte que : $\boxed{f(x)-g(x) = (x-1)(2x+1)}$.

b) On cherche les réels x pour lesquels $f(x)=g(x)$ ce qui équivaut à dire que $f(x)-g(x)=0$.

D'après la question a), cela revient à dire que : $(x-1)(2x+1)=0$, c'est à dire (produit nul) :

$x-1=0$ ou $2x+1=0$

$x=1$ ou $x=-\frac{1}{2}$

$\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}\,;\,1\right\}$. $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en deux points d'abscisses respectives $-\frac{1}{2}$ et 1.

c) $f(x)-g(x) = (x-1)(2x+1)$: on fait un tableau de signes : $x-1 \geq 0$ lorsque $x \geq 1$

$2x+1 \geq 0$ lorsque $x \geq -\frac{1}{2}$

Donc :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x)-g(x)=(x-1)(2x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d) Grâce au tableau précédent, $(x-1)(2x+1) < 0$ lorsque : $-\frac{1}{2} < x < 1$.

$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\frac{1}{2}\,;\,1\right[}$.

e) Grâce à la question précédente, $f(x)-g(x) < 0$ lorsque $x \in \left]-\frac{1}{2}\,;\,1\right[$: donc $\mathcal{C}_f$ est située AU-DESSOUS de $\mathcal{C}_g$ sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,1\right[$.

de même, $f(x)-g(x) > 0$ sur chacun des intervalles $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[$ et $\left]1\,;\,+\infty\right[$: sur ces deux intervalles $\mathcal{C}_f$ est située AU-DESSUS de $\mathcal{C}_g$.

Enfin (question b), $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en les points $A\left(-\frac{1}{2}\,;\,\underbrace{\frac{1}{4}}_{=f\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)$ et $B\left(1\,;\,\underbrace{1}_{=f(1)}\right)$.