Exercice I

a) • Par limite de référence du cours sur les croissances comparées :

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$

$\Rightarrow$ Donc par limite de référence et de produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} 3xe^{x} = 0}$

b) On a une forme indéterminée en $+\infty$ par somme pour $2x - e^{x}$!

On factorise par x : $2x - e^{x} = x\left(2 - \frac{e^{x}}{x}\right)$

• Par limites de référence : • $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$

• Par limite de somme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2 - \frac{e^{x}}{x}\right) = -\infty$

$\Rightarrow$ Donc par limite de produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2 - \frac{e^{x}}{x}\right) = -\infty \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}(2x - e^{x}) = -\infty}$ Ok

c) On a une forme indéterminée en $+\infty$ par produit pour xe^{-x} !

Or, $xe^{-x} = x \times \frac{1}{e^{x}} = \frac{x}{e^{x}}$, et par limite de référence du cours on sait que :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$

Or, $\frac{x}{e^{x}} = \frac{1}{\frac{e^{x}}{x}}$, donc par limite de quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x}} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^{-x}) = 0}$ Ok

d) On a une forme indéterminée en $+\infty$ par quotient pour $\frac{e^{x}}{2x^{2}}$!

Or, $1 + \frac{e^{x}}{2x^{2}} = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{e^{x}}{x^{2}}$ Ok

• Par limite de référence du cours sur les croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^{2}} = +\infty$

• Par limite de produit : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2} \times \frac{e^{x}}{x^{2}}\right) = +\infty$

$\Rightarrow$ Donc par limite de somme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{e^{x}}{x^{2}}\right) = +\infty \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{e^{x}}{2x^{2}}\right) = +\infty}$ Ok

1/12

e) La fonction sinus n'a pas de limite en $-\infty$!

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$

donc $-e^{x} \leqslant e^{x}\sin(x) \leqslant e^{x}$ car $e^{x} > 0$

donc $1 - e^{x} \leqslant 1 + e^{x}\sin(x) \leqslant 1 + e^{x}$

• Par limite de référence : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 = 1$

• Donc par limite de somme : • $\lim\limits_{x\to-\infty}(1 - e^{x}) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(1 + e^{x}) = 1$

$\Rightarrow$ Donc d'après le théorème des gendarmes : Ok $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + e^{x}\sin(x)\right) = 1}$

Exercice II

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 2}{e^{3x} + 1} \text{, définie sur } \mathbb{R}$$

* Limite de f en $+\infty$:

On a une forme indéterminée pour le quotient donc on factorise :

$$\frac{e^{2x} - 2}{e^{3x} + 1} = \frac{e^{2x}\left(1 - \frac{2}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}\left(e^{x} + \frac{1}{e^{2x}}\right)} = \frac{1 - \frac{2}{e^{2x}}}{e^{x} + \frac{1}{e^{2x}}}$$ Oui

- Par limite de produit et de référence : $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty$,

donc par limite de fonction composée : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$ Oui

- Par limite de quotient on a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{e^{2x}} = 0$
- Par limites de référence et de somme on obtient :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{e^{2x}}\right) = 1$ Oui et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{x} + \frac{1}{e^{2x}}\right) = +\infty$ Oui

⇒ Donc par limite de quotient : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

→ La droite d'équation $y = 0$ (soit l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ Oui

* Limite de f en $-\infty$:

- Par limite de référence et de produit : $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$,

donc par limite de fonction composée $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$.

De même $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{3x} = 0$

- Par limite de somme on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{2x} - 2) = -2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{3x} + 1) = 1$

⇒ Donc par limite de quotient : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2}$

→ La droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$. Oui

f) $\frac{e^{0,1x}}{2x} = \frac{e^{0,1x}}{0,1x} \times \frac{0,1}{2} = 0,05 \frac{e^{0,1x}}{0,1x}$

OR, $\lim\limits_{x \to +\infty} 0,1x = +\infty$, et par croissances comparées, $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^{X}}{X} = +\infty$.

Donc par limite de composé, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{0,1x}}{0,1x} = +\infty$ et par limite de produit $(0,05 > 0)$ on a :

$\lim\limits_{x \to +\infty} 0,05 \frac{e^{0,1x}}{0,1x} = +\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{0,1x}}{2x} = +\infty.}$

Exercice III

$$v(t) = 9{,}81\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \text{ sur } [0;+\infty[$$

1) La fonction v est dérivable sur $[0;+\infty[$ et est de la forme $v(t) = k\,u(t)$

avec $k = 9{,}81\frac{m}{k}$ (car k et m sont des constantes) et $\begin{cases} u(t) = 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \\ u'(t) = \frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t} \end{cases}$ Oui

$v'(t) = k\,u'(t) = 9{,}81\frac{m}{k} \times \frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t} = 9{,}81e^{-\frac{k}{m}t}$

Etudions le signe de $v'(t)$:

Pour tout $t \in [0;+\infty[$, $e^t > 0$ donc $e^{-\frac{k}{m}t} > 0$ et $9{,}81 > 0$

Donc pour tout $t \in [0;+\infty[$, $v'(t) > 0$ Oui

Donc d'après le théorème de Lagrange, la fonction v associée à la vitesse de la goutte d'eau croit sur $[0;+\infty[$. On a :

t	0	$+\infty$
signe de $v'(t)$	+	
variation de $v(t)$	$0 \nearrow$	$9{,}81\frac{m}{k}$

Oui

* $v(0) = 9{,}81\frac{m}{k}(1 - e^0) = 0$ (vitesse initiale nulle)

2) • Par limite de référence et de produit

$\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\frac{k}{m}t\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{T\to-\infty} e^T = 0$, donc par limite de fonction composée :

$\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{k}{m}t} = 0$

• Par limite de somme : $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) = 1$ Oui

$\Rightarrow$ Donc par limite de produit : $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 9{,}81\frac{m}{k}}$ Bien

3) - La vitesse de la goutte dépasse 99 % de sa vitesse limite signifie que la vitesse est supérieure à $9{,}81\frac{m}{k} \times 0{,}99$ $\left(\approx 9{,}71\frac{m}{k}\right)$

- Calculons désormais la vitesse au bout d'une durée de chute égale à $5\frac{m}{k}$:

$v\left(5\frac{m}{k}\right) = 9{,}81\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}\times\frac{m5}{k}}\right) = 9{,}81\frac{m}{k}\left(1 - e^{-5}\right)$

Or $1 - e^{-5} \approx 0{,}993$ donc $v\left(\frac{5m}{k}\right) \approx 9{,}81\frac{m}{k} \times 0{,}993$ $\left(\approx 9{,}74\frac{m}{k}\right)$

- $0{,}993 > 0{,}99$, donc $\boxed{9{,}81\frac{m}{k}\times 0{,}993 > 9{,}81\frac{m}{k}\times 0{,}99}$

$\Rightarrow$ Donc l'affirmation est correcte. Oui

4) a) $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 9{,}81\frac{m}{k}$

Donc la droite (d) d'équation $y = 9{,}81\frac{m}{k}$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$. Oui.

b) La tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0, notée To a pour équation : $y = v'(0)(x - 0) + v(0)$ avec $v(0) = 0$

donc $y = x \times v'(0) = x \times 9{,}81e^0 = 9{,}81x$

c) Point d'intersection de T et d : $M(x_M ; y_M)$

On a alors $y_M = 9{,}81\frac{m}{k}$ et $y_M = 9{,}81x_M$

donc $9{,}81\frac{m}{k} = 9{,}81x_M \iff x_M = \frac{m}{k}$

L'abscisse du point d'intersection est $\frac{m}{k}$ Oui

5) $\frac{m}{k}$ est l'abscisse du point d'intersection des droites d et T.

graphiquement on lit que $\frac{m}{k}$ vaut 1,5 Oui

Exercice IV

a) $f(x) = 3$ n'a aucune solution sur $[-2; 8]$ car d'après le tableau de variation de f, la valeur maximale prise par f sur $[-2; 8]$ est 2, et $2 < 3$

b) *) f est continue sur $[-8; -2]$ puisqu'il y a une flèche dans le tableau de variation sur cet intervalle

**) f est strictement décroissante sur $[-8; -2]$ d'après le tableau de variation

***) $3 \in [-4; 5]$

⇒ Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 3$ admet une unique solution sur $[-8; -2]$

c) *) f est continue sur $[-8; -2]$

**) f est strictement décroissante sur $[-8; -2]$

***) $0 \in [-4; 5]$

⇒ Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-8; -2]$

*) f est continue sur $[-2; 3]$ d'après le tableau de variation.

**) f est strictement croissante sur $[-2; 3]$ d'après le tableau de variation.

***) $0 \in [-1; 2]$

⇒ Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-2; 3]$

• f est continue sur $[3; 8]$ et est strictement croissante sur $[3; 8]$

Bien

Mais $0 \notin [1; 2]$

⇒ Donc $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[3; 8]$

⟹ On aboutit à $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $[-8; 8]$

Exercice V

$f(x) = \dfrac{3}{1 + e^{-2x}}$ sur $\mathbb{R}$ et $\Delta : y = 3$

a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{1+e^{-2x}}$

C'est un quotient de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $1+e^{-2x}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Donc par théorème la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Cette fonction est de la forme $f(x) = k.\dfrac{1}{u}$ avec $\begin{cases} u(x) = 1+e^{-2x} \\ u'(x) = -2e^{-2x} \end{cases}$

$$f'(x) = k \times \left(\frac{-u'(x)}{u^2(x)}\right) = 3 \times \frac{2e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2} = \frac{6e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2}$$

Etudions le signe de $f'(x)$:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(1+e^{-2x})^2 > 0$, et $e^{-2x} > 0$ donc $6e^{-2x} > 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ Oui

Donc d'après le théorème de Lagrange f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		+	
variation de $f(x)$	0	↗	3

Oui

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

c) On cherche $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

- Par limites de référence : $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 = 3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$
- Par limite de produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x = -\infty$

  et par limite de référence : $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$

  donc par limite de fonction composée : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$
- Par limite de somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+e^{-2x}) = 1$ Oui

$\Rightarrow$ Donc par limite de quotient : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3}$

$\rightarrow$ La droite Δ d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ Oui

d) *) f est continue sur $]-\infty;+\infty[$, car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

**) f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; donc sur $]-\infty;+\infty[$

***) $2,999 \in [0;3]$

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 2,999$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On la note α : $f(\alpha) = 2,999$ Oui

e) Avec la calculatrice TI on obtient :

Avec un pas égal à 1 :

x	$f(x)$
4	2,99899
α	2,999
5	2,99986

$4 < \alpha < 5$

Avec un pas égal à 0,1 :

x	$f(x)$
4,0	2,99899
α	2,999
4,1	2,99917

$4,0 < \alpha < 4,1$

Avec un pas égal à 0,01 :

x	$f(x)$
4,00	2,99899
α	2,999
4,01	2,99901

$4,00 < \alpha < 4,01$

→ $4,00 < \alpha < 4,01$ est un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

Exercice VI

Partie A

1. **a.** La fonction f est continue et dérivable sur $[0\ ;\ 10]$. En utilisant les règles de dérivation d'un produit, on obtient :
$f'(t) = 3\mathrm{e}^{-0,5t+1} + 3t \times -0,5\mathrm{e}^{0,5t+1} = \mathrm{e}^{-0,5t+1}(+-3(0,5t+1)) = (-1,5t+3)\mathrm{e}^{-0,5t+1}$
Donc $\forall t \in [0\ ;\ 10]$, $f'(t) = 3(-0,5t+1)\mathrm{e}^{-0,5t+1}$

   b. $\forall t \in [0\ ;\ 10]$, $\mathrm{e}^{-0,5t+1} > 0$ donc $f'(t)$ a le même signe que $-0,5t+1$.
$-0,5t+1 \geqslant 0 \iff x \leqslant 2$.
Dans le tableau : $f(0) = 0$, $f(2) = 6\mathrm{e}^0 = 6$ et $f(10) = 30\mathrm{e}^{-5+1} = 30\mathrm{e}^{-4}$.
D'où le tableau de variation de f :

x	0		2		10
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	6	↘	$30\mathrm{e}^{-4}$

   c. Le maximum de la fonction f est atteint pour $t = 2$, et $f(2) = 6$. La dose maximale de 6 mg sera atteinte au bout de 2 heures.

2. **a.** Sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$, la fonction f est continue et strictement croissante à valeurs dans $[0\ ;\ 6]$. Or $5 \in [0\ ;\ 6]$, donc d'après le corollaire du TVI (théorème des valeurs intermédiaires), l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.
À la calculatrice, $\alpha \approx 1,02$.

   b. D'après le tableau de variations, $f(t) \geqslant 5 \iff t \in [\alpha\ ;\ \beta]$. De plus $\beta - \alpha = 2,44$ (heures).
Donc le traitement sera efficace pendant 2,44 heures soit environ 146 minutes.

Partie B

1. Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang diminue de 30 %, donc il en reste 70 %. Puis on en injecte à nouveau 1,8 mg. Sachant que $u_0 = 2$, alors $u_1 = 0,70 \times 2 + 1,8 = 3,2$.
Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang sera de 3,2 mg.

2. Soi $n \in \mathbb{N}$. u_n désigne la quantité de médicament dans le sang au bout de n heures. Une heure plus tard, il ne restera que 70 % de la quantité précédente (70 % de u_n), puis on en ajoute 1,8 mg par injection.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,7 \times u_n + 1,8$.

3. **a.** Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

   Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = 3,2$. Donc $u_0 \leqslant u_1 < 6$. L'initialisation est vérifiée.

   Hérédité : on suppose que si $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

   Montrons que $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6$.

   $u_n \leqslant u_{n+1} < 6 \iff 0,7 \times u_n \leqslant 0,7 \times u_{n+1} < 0,7 \times 6 \iff 0,7u_n \leqslant 0,7u_{n+1} < 4,2$
   donc $0,7u_n + 1,8 \leqslant 0,7u_{n+1} + 1,8 < 4,2 + 1,8 \iff 0,7u_n + 1,8 \leqslant 0,7u_{n+1} + 1,8 < 6$.

   Donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6$. L'hérédité est démontrée.

   Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$.

   D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

   b. Nous venons de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$. Cela signifie que la suite (u_n) est croissante et majorée par 6. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite finie notée ℓ.

   c. La suite (u_n) converge vers ℓ donc ℓ est l'unique solution de l'équation $\ell = 0,7\ell + 1,8$ (théorème du point fixe).

   $l = 0,7l + 1,8 \iff 0,3l = 1,8 \iff l = 6$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6$

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = -u_n + 6$.

   a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -u_{n+1} + 6 = -(0,7 \times u_n + 1,8) + 6 = -0,7u_n + 4,2 = 0,7\left(-u_n + \dfrac{4,2}{0,7}\right)$
   $= 0,7(-u_n + 6) = 0,7v_n$.
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,7n_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,7 et de premier terme $v_0 = -u_0 + 6 = 4$.

   b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 4 \times 0,7^n$.
   De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = -u_n + 6$ donc $u_n = -v_n + 6 = 6 - 4 \times 0,7^n$.

   c. A l'aide de sa machine à calculer, on trouve sans peine que :

Cela signifie que $u_6 \geqslant 5,5$. Il faudra donc au total 7 injections (de l'injection initiale u_0 à la 7ᵉ qui correspond à u_6).

Exercice VII

Exercice I

Partie A

1a) $P(A) = 0{,}3$.

1b) Pour chaque personne interrogée, participer ou pas à l'enquête constitue une épreuve de Bernoulli (le succès est ici participer à l'enquête). Le paramètre de cette épreuve de Bernoulli est : $p = P(A) = 0{,}3$.

Interroger 10 personnes au hasard constitue un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}3$.
Vu que chaque personne répond indépendamment des autres, la variable aléatoire X égale au nombre de personnes qui participent à l'enquête parmi les 10 interrogées, est égale au nombre de succès obtenus lors de ce schéma de Bernoulli.

Donc $\boxed{X \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(10\,;0{,}3).}$

1c) Vu que $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(10\,;0{,}3)$ on a :
Pour tout entier naturel $k \leq 10$, $P(X=k) = \binom{10}{k} \times 0{,}3^{k} \times (1-0{,}3)^{k}$.

Donc $P(X=2) = \binom{10}{2} \times 0{,}3^{2} \times 0{,}7^{8}$

On tape sur T.I : binomFdp(10, 0.3, 2)

$\boxed{P(X=2) \simeq 0{,}233 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.

1d) $P(X<4) = P(X\leq 3)$ car X prend des valeurs entières.

$P(X\leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$ qui s'obtient en tapant :

binomFrep(10, 0.3, 3)

Donc $\boxed{P(X<4) \simeq 0{,}650 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$

1e) On cherche ici : $P(1\leq X\leq 9) = 1 - \left(P(X=0) + P(X=10)\right)$.

$P(1\leq X\leq 9) = 1 - \left(\binom{10}{0}\times 0{,}3^{0}\times 0{,}7^{10} + \binom{10}{10}\times 0{,}3^{10}\times 0{,}7^{0}\right)$

$P(1\leq X\leq 9) = 1 - \left(0{,}7^{10} + 0{,}3^{10}\right)$ car $\binom{10}{0} = \binom{10}{10} = 1$

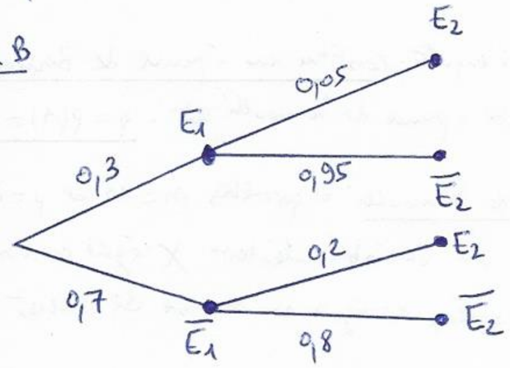
$\boxed{P(1\leq X\leq 9) \simeq 0{,}972 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$

1f) Rappel : Si $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors $E(X) = np$.
Ici, $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(10, 0{,}3)$, donc $E(X) = 10\times 0{,}3 = 3$.

En moyenne, on peut espérer obtenir 3 personnes, par échantillon de 10, qui accepteront de participer à l'enquête.

Partie B

1)



2a) On cherche ici : $P(E_1 \cap E_2)$:

Or, $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times P_{E_1}(E_2) = 0{,}3 \times 0{,}05 = 0{,}015$.

2b) $P(E_2) = \underbrace{P(E_1 \cap E_2)} + \underbrace{P(\overline{E_1} \cap E_2)}$ d'après la formule des probabilités totales.

$P(E_2) = 0{,}015 + P(\overline{E_1}) \times P_{\overline{E_1}}(E_2) = 0{,}015 + 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}015 + 0{,}14 = 0{,}155$.

2c) On cherche ici : $P_{\overline{E_2}}(E_1)$:

D'après la relation des probabilités conditionnelles : $P_{\overline{E_2}}(E_1) = \dfrac{P(E_1 \cap \overline{E_2})}{P(\overline{E_2})}$ avec :

$P(\overline{E_2}) = 1 - P(E_2) = 1 - 0{,}155 = 0{,}845$

et $P(E_1 \cap \overline{E_2}) = P(E_1) \times P_{E_1}(\overline{E_2}) = 0{,}3 \times 0{,}95 = 0{,}285$

Donc $P_{\overline{E_2}}(E_1) = \dfrac{0{,}285}{0{,}845}$, $\boxed{P_{\overline{E_2}}(E_1) \simeq 0{,}337 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.

BONUS

I- $f : [0;1] \to [0;1]$ est continue.

Soit g la fonction définie sur $[0;1]$ par : $g(x) = f(x) - x$

*) g est continue sur $[0;1]$ ① en tant que somme de deux fonctions continues sur $[0;1]$.

**) $g(0) = f(0)$ et f est à valeurs dans $[0;1]$, donc $\forall x \in [0;1]$, $0 \leq f(x) \leq 1$ (*)

donc $f(0) \geq 0$, donc $\boxed{g(0) \geq 0}$ ②

$g(1) = f(1) - 1$ et (*) avec $x = 1$ donne : $f(1) \leq 1$, donc $f(1) - 1 \leq 0$.

Par suite, $\boxed{g(1) \leq 0}$ ③

①, ② et ③ font qu'on peut appliquer le TVI à g : $0 \in [g(1) ; g(0)]$, donc d'après le TVI, $g(x) = 0$ a au moins une solution sur $[0;1]$, c'est-à-dire $f(x) - x = 0$ a au moins une solution sur $[0;1]$ et donc idem pour $f(x) = x$.

Conclusion : f a au moins un point fixe sur $[0;1]$.

II-

f est définie sur $[a;b]$ ce qui signifie que l'on peut calculer $f(t)$, pour tout réel t appartenant à $[a;b]$.

0) Soit $t \in \left[a;\frac{a+b}{2}\right]$: alors : $a \leq t \leq \frac{a+b}{2}$

Donc : $a + \frac{b-a}{2} \leq t + \frac{b-a}{2} \leq \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}$

Donc : $\frac{2a}{2} + \frac{(b-a)}{2} \leq t + \frac{b-a}{2} \leq \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} - \frac{a}{2}$

Donc $\frac{2a+b-a}{2} \leq t + \frac{b-a}{2} \leq b$.

Donc $\frac{a+b}{2} \leq t + \frac{b-a}{2} \leq b$

Vu que $a \leq \frac{a+b}{2}$ (car $2a \leq a+b$ vu que $a \leq b$) les valeurs prises par $t + \frac{b-a}{2}$, lorsque $t \in \left[a;\frac{a+b}{2}\right]$ restent comprises dans $\left[\frac{a+b}{2};b\right]$, intervalle contenu dans $[a;b]$ sur lequel f est bien définie.

Donc g est bien définie sur $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$.

1) $\left[a;\frac{a+b}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longmapsto g(t) = f\left(t + \frac{b-a}{2}\right) - f(t)$.

$g(a) = f\left(a + \frac{b-a}{2}\right) - f(a) = f\left(\frac{2a+b-a}{2}\right) - f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)$.

$g\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ car $f(a) = f(b)$!

*) g est définie sur $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$ et continue sur cet intervalle (somme et composée de fonctions continues). d'après les calculs précédents.

**) $g(a) = -g\left(\frac{a+b}{2}\right)$ d'après les calculs précédents.

Sans perte de généralité, supposons $g(a) \geq 0$ et $g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq 0$.

Donc $g(a)$ et $g\left(\frac{a+b}{2}\right)$ sont de signes contraires.

Donc $0 \in \left[g\left(\frac{a+b}{2}\right); g(a)\right]$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires 0 admet au moins une solution dans un antécédent par g sur $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$ i.e l'équation $g(t)=0$ admet au moins une solution dans $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$, donc g s'annule au moins une fois sur $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$.

② Cette question est plus difficile :

Notons $f(t)$ la distance parcourue par le marcheur $(0 \leq t \leq 1)$: on a $f(0)=0$ et $f(1)=4$!

Soit g la fonction définie sur $[0;\frac{1}{2}]$ par : $g(t) = f(t+\frac{1}{2})-f(t)$.

g est continue sur $[0;\frac{1}{2}]$ car f l'est (cf. question ①).

De plus : $\begin{cases} g(0) = f(\frac{1}{2})-f(0) = f(\frac{1}{2}) \\ g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})-f(\frac{1}{2}) = f(1)-f(\frac{1}{2}) = 4-f(\frac{1}{2}) \end{cases}$

De deux choses l'une : Au cours de sa première demi-heure de marche, soit il parcourt moins de 2 km, soit il parcourt au moins 2 km.

*) S'il parcourt moins de 2 km sur l'intervalle $[0;\frac{1}{2}]$: on a donc $f(t)<2$ si $t \in [0;\frac{1}{2}]$

donc $4-f(\frac{1}{2}) > 2$

Par suite, dans ce cas là : $\begin{cases} g(0) = f(\frac{1}{2}) \ (<2) \\ g(\frac{1}{2}) = 4-f(\frac{1}{2}) \ (>2) \end{cases}$. Or g est continue sur $[0;\frac{1}{2}]$, donc et $2 \in]g(0);g(\frac{1}{2})[$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\tau \in]0;\frac{1}{2}[$ tel que : $g(\tau)=2$.

Par suite, $g(\tau) = \boxed{2 = f(\tau+\frac{1}{2})-f(\tau)}$

Durant le laps de temps $\tau+\frac{1}{2}-\tau = \frac{1}{2}$ heure, le marcheur aura donc parcouru exactement 2 km !

**) S'il parcourt au moins 2 km dans la première demi-heure : $f(t) \geq 2$ si $t \in [0;\frac{1}{2}]$.

Donc $f(\frac{1}{2}) \geq 2$ et $4-f(\frac{1}{2}) \leq 2$.

De même : $\begin{cases} g(0) = f(\frac{1}{2}), \text{ donc } g(0) \geq 2 \\ g(\frac{1}{2}) = 4-f(\frac{1}{2}), \text{ donc } g(\frac{1}{2}) \leq 2 \end{cases}$. Comme précédent, g continue sur $[0;\frac{1}{2}]$

et $2 \in [g(\frac{1}{2});g(0)]$, donc le T.V.I assure l'existence d'un réel $\tau' \in [0;\frac{1}{2}]$ tel que

$g(\tau')=0 \iff f(\tau'+\frac{1}{2})-f(\tau')=2$

Dans le laps de temps d'une demi-heure $(\tau'+\frac{1}{2}-\tau')$ il aura exactement parcouru 2 km.

Dans tous les cas de figure, on a bien trouvé un intervalle d'amplitude $\frac{1}{2}$h = 30 min en lequel il parcourt exactement 2 km !!

Voici un très joli exercice, DIFFICILE ! Bravo si vous l'avez trouvé tout seul.