

I - Vocabulaire des fonctions**Définition 1**

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$.

Définir une fonction notée f sur $\mathcal{D}$, c'est associer à chaque réel x appartenant à $\mathcal{D}$ un unique réel appelé l'image de x par la fonction f , que l'on note $f(x)$.

Notation : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow f(x)$

Remarque : x est appelé la variable de la fonction.

Exemple : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow f(x) = x^2$.

Calculer $f(5)$; Quelle est l'image de $-\frac{3}{4}$ par f ?

Méthode : Pour déterminer l'image d'un nombre donné par une fonction f , on remplace x par la valeur donnée (par l'énoncé) dans l'expression $f(x)$.

Définition 2

Soit f une fonction.

L'ensemble de tous les réels qui ont une image par f est appelé *l'ensemble de définition* de la fonction f , on dit encore domaine de définition de f . On le notera, en général, $\mathcal{D}_f$.

$\mathcal{D}_f$ est l'ensemble de toutes les valeurs que l'on peut donner à x , pour lesquelles on a le droit d'effectuer le calcul de l'expression $f(x)$.

Une valeur x pour laquelle le calcul de l'expression de $f(x)$ n'est pas possible est appelée une **VALEUR INTERDITE** pour la fonction f .

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$.

0 est une valeur interdite pour f , car on ne peut pas diviser par 0.

Pour toutes les autres valeurs du réel x , on peut calculer $\frac{1}{x}$, donc la fonction f est définie sur
....., donc $\mathcal{D}_f = \dots\dots\dots$

On pourra retenir que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ auquel on retire les éventuelles valeurs interdites de f

On notera: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{\text{valeurs interdites}\}$ (lire $\mathbb{R}$ privé des valeurs interdites).

Remarque** : En classe de seconde, les valeurs interdites, et donc les éventuels trous dans les ensembles de définition, apparaissent dès lors qu'il y a des dénominateurs (ils doivent être non nuls) ou des racines carrées (le *radicande*, c'est-à-dire ce qui est sous la racine doit être positif).

Exercice 1

Déterminer pour chacune des fonctions suivantes, son ensemble de définition :

$$a) f(x) = \frac{1}{x-1} \quad ; \quad b) g(x) = x^2 + 1 \quad ; \quad c) h(x) = \sqrt{x} \quad ; \quad d) i(x) = \sqrt{3-2x}$$

✂-----

Définition 3

Soit f une fonction, et $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition.

Soit $y \in \mathbb{R}$. S'il existe $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $y = f(x)$, alors on dit que x est un antécédent de y par la fonction f .

Schéma :

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1$.

Déterminer l'antécédent de 4 par f .

Méthode : On cherche s'il existe un réel x tel que $f(x) = 4$. Donc, on doit résoudre l'équation : $f(x) = 4$, où x est l'inconnue, et s'assurer que la (les) solution(s) obtenues sont bien situées dans $\mathcal{D}_f$.

Remarque : $f(2) = 5$ équivaut à dire que l'image de 2 par f vaut 5.
 $f(2) = 5$ implique seulement que 2 est un antécédent de 5 par f .

Exemple : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.

– 3 a-t-il un antécédent par f ? Justifier.

Remarque cruciale : Un nombre donné peut avoir aucun antécédent par une fonction f , ou bien un seul antécédent par f , ou bien plusieurs antécédents par f .

Définition 4 ♥♥♥

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$.

On appelle **courbe représentative de la fonction f** , ou encore, graphe de f , l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x ; y)$ tels que $y = f(x)$, le réel x prenant toutes les valeurs possibles dans $\mathcal{D}_f$. On notera C_f la courbe représentative de la fonction f :

$C_f = \{M(x ; y) \text{ tels que } x \in \mathcal{D}_f \text{ et } y = f(x)\}$. La relation $y = f(x)$ est appelée équation de la courbe C_f .

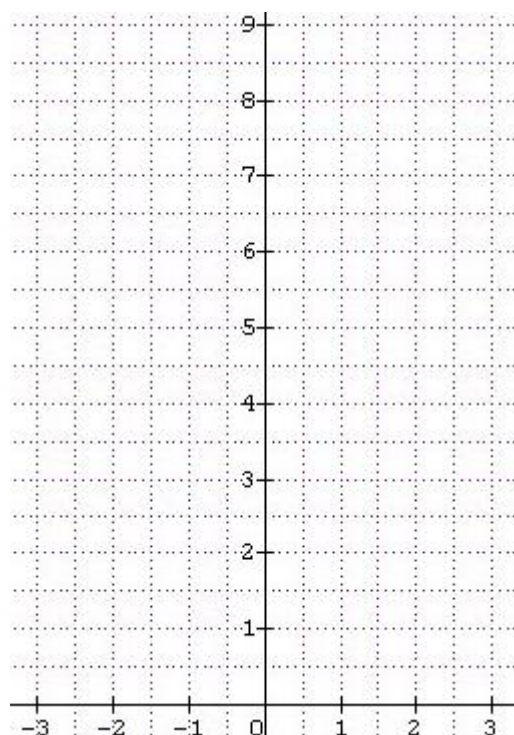
Illustration :

Exemple : Soit f la fonction définie sur $[-3 ; 3]$ par : $f(x) = x^2$.

Construire sa courbe représentative sur l'intervalle $[-3 ; 3]$.

Méthode : On commence toujours par faire un tableau de valeurs de la fonction f , qui permet de déterminer et de placer des points situés sur C_f .

Tracé :



Remarques importantes : Comment réussir le tracé de son chef d'œuvre ?

- 1) Ne pas relier deux points consécutifs par un segment de droite.
 - 2) Une courbe sera d'autant plus précise qu'il y aura de points placés dessus.
- Appartenance d'un point à la courbe représentative d'une fonction

A quelle condition un point $M(x; y)$ est-il situé sur la courbe C_f représentant f ?

♥♥ **Règle XXL** : $M(x; y) \in C_f$ si et seulement si : ♥♥

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$. On note C_f sa courbe représentative.

- a) Le point $A(1; 2)$ est-il situé sur C_f ? Justifier.
- b) Même question pour le point $B(3; 2)$.
- c) Déterminer les coordonnées du point C qui a pour abscisse 2 et qui est situé sur C_f .

✂-----

Exercice 3

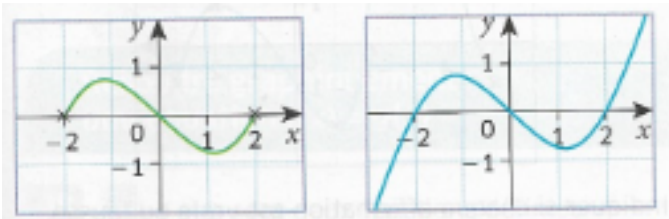
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ et C_g sa courbe représentative.

- a) Le point $A(\frac{1}{2}; \frac{4}{9})$ appartient-il à C_g ?
- b) Existe-t-il un point de l'axe des ordonnées qui appartient à C_g ?

✂-----

Exercice 4

A l'aide des graphiques suivants, déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f, g dont on donne les courbes représentatives :

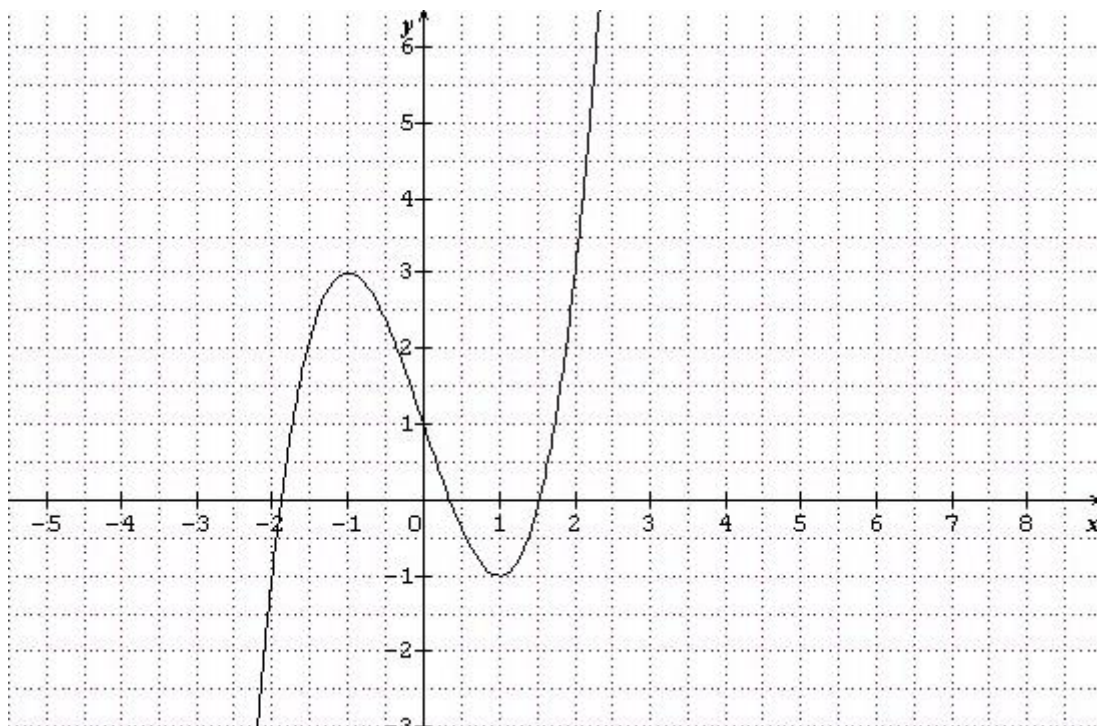


✂-----

II - Lectures graphiques

Exemple : A l'aide du graphique donné, déterminer :

- a) L'image de 2 par la fonction f
- b) L'image de 0 par f
- c) Le(s) antécédent(s) de 3 par f
- d) Le(s) antécédents de -1 par f
- e) Le point $Z(-1,5 ; 2)$ appartient-il à la courbe représentant f ?



- Méthode graphique pour lire l'image d'un réel a donné :

- Méthode graphique pour déterminer les éventuels antécédents d'un nombre b donné par une fonction :

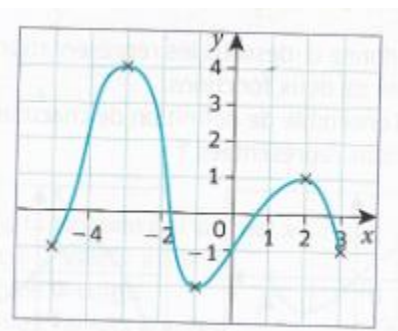
III - Résolution graphique d'équations

Propriété : Equation de la forme $f(x) = k$, où k est un réel donné et f une fonction donnée, et x la variable.

Les éventuelles **solutions de l'équation** $f(x) = k$, sont les **abscisses des éventuels points d'intersection de C_f et de la droite horizontale** d'équation $y = k$, que j'appellerai provisoirement, la droite d'ordonnée constante égale à k .

Illustration :

Exemple : Déterminer graphiquement l'ensemble de définition D_f de la fonction f dont le graphe est donné ci-dessous, puis résoudre graphiquement sur D_f les équations suivantes :



a) $f(x) = 2$; b) $f(x) = 1$; c) $f(x) = 0$; d) $f(x) = -2,5$; e) $f(x) = -2$.

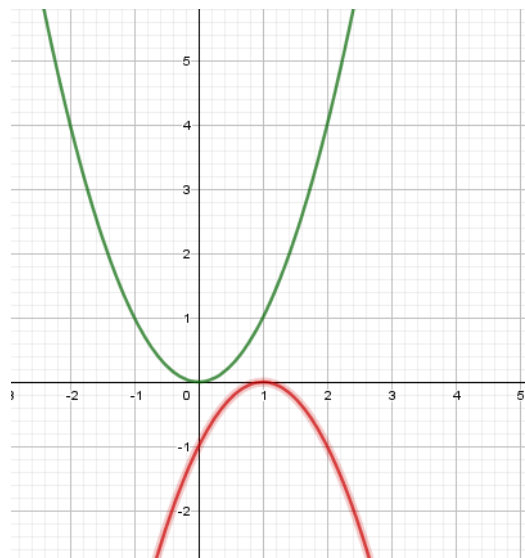
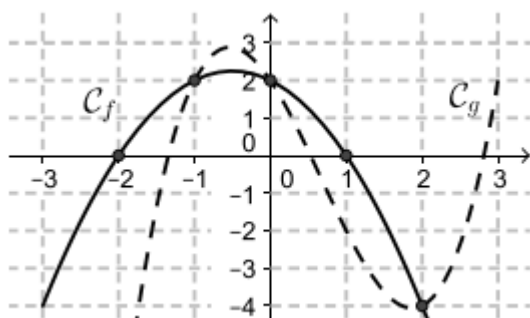
✂-----

♥♥ **Propriété :** Solutions de l'équation $f(x) = g(x)$, où f et g sont deux fonctions données, et x la variable.

Les solutions de l'équation : $f(x) = g(x)$ sont

Illustration :

Exemples : résoudre graphiquement les équations : $f(x) = g(x)$ sur $\mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants :

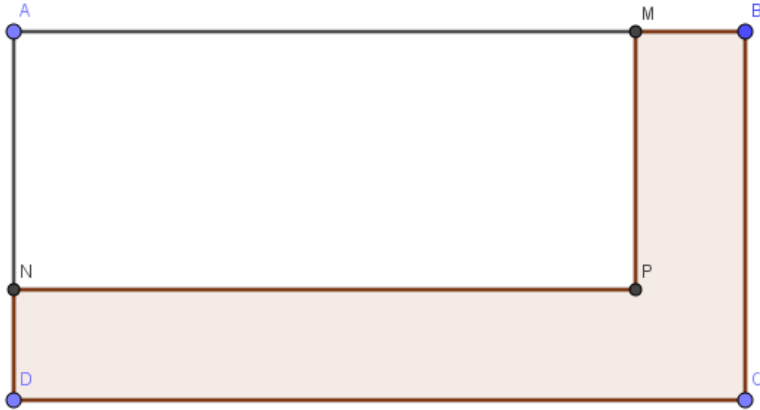


Exercice 5

$ABCD$ est un rectangle tel que : $AB = 10 \text{ cm}$ et $AD = 5 \text{ cm}$.

Soit M un point appartenant au segment $[AB]$, et N un point appartenant au segment $[AD]$ tel que $MB = ND$. On construit enfin le point P tel que $AMPN$ soit un rectangle.

On note $x = MB = ND$.



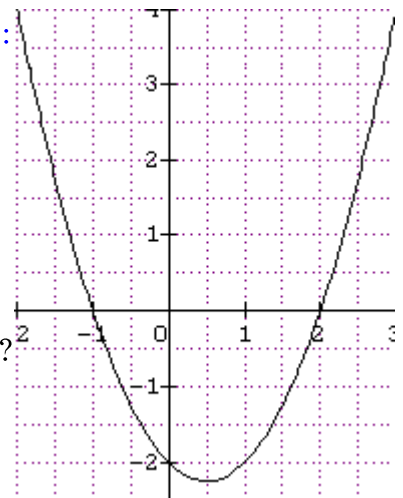
- a) A quel intervalle noté I , le nombre x appartient-il ?
- b) Vérifier que pour tout réel x appartenant à I , l'aire du polygone $MBCDNPM$, notée $f(x)$, est égale à $-x^2 + 15x$.
- c) Existe-il une (des) valeur(s) de x appartenant à I pour laquelle l'aire de ce polygone soit égale à 8 cm^2 ? Expliquer votre démarche.

✂-----

IV - Signe des valeurs prises par une fonction, résolution graphique d'inéquations.

En s'aidant de la courbe représentative de la fonction f ci-contre, déterminer :

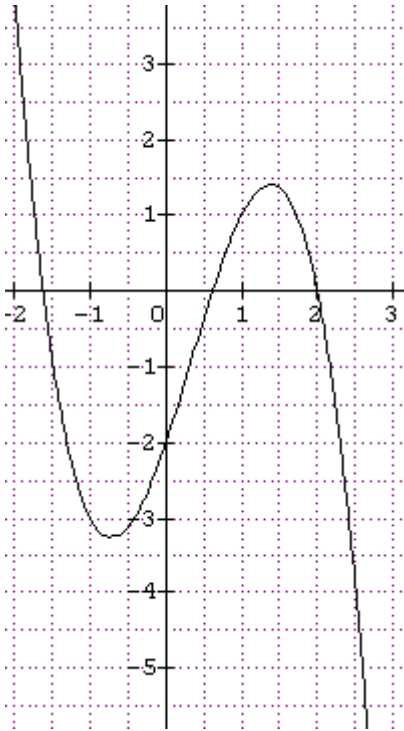
- a) L'ensemble de définition de f .
- b) Le signe des nombres : $f(0)$; $f(1)$; $f(-1,5)$; $f(3)$.
- c) Sur quel intervalle les valeurs prises par la fonction f sont-elles négatives ?
- d) Sur quel(s) intervalle(s) les valeurs prises par f sont-elles positives ?



- e) On résume l'étude du signe des valeurs prises par la fonction f en faisant le tableau suivant, appelé

Exercice 6

Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[-2 ; 3]$ les inéquations : $f(x) < 0$, puis $f(x) \geq 0$, puis dresser le tableau de signes de la fonction f dont on vous donne le graphe :



✂-----

Exercice 7

f est une fonction définie sur $[-2 ; 5]$ qui a pour tableau de signes :

x	-2	0	2	5	
$f(x)$	-	0	+	0	+

Construire une courbe représentative possible pour f dans un repère orthonormé.

✂-----

Remarque cruciale : Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

$f(x) < 0$ sur I équivaut graphiquement à.....

.....

$f(x) > 0$ sur I équivaut graphiquement à

.....

$f(x) = 0$ équivaut graphiquement à

Propriété fondamentale

Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I , et k un réel fixé.

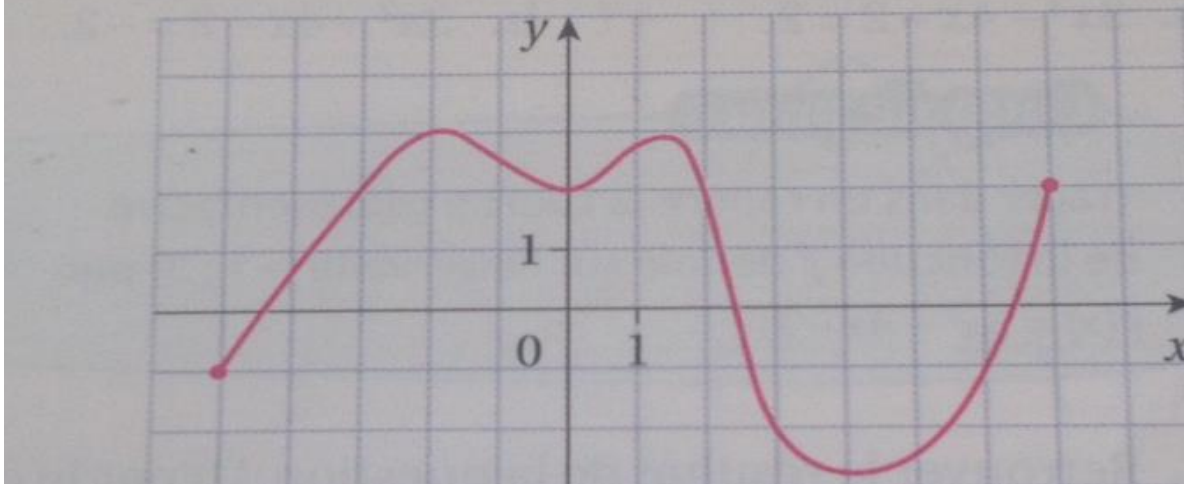
- Résoudre sur I l'inéquation : $f(x) < k$ revient.....
.....
- Résoudre sur I l'inéquation : $f(x) > k$ revient à.....
.....
- Résoudre sur I l'inéquation : $f(x) < g(x)$ revient à :
.....
- Résoudre sur I l'inéquation : $f(x) > g(x)$ revient à :
.....

Illustrations et justification :

Exercice 8

- 1) En s'aidant des graphiques ci-dessous, résoudre graphiquement les équations et inéquations demandées :

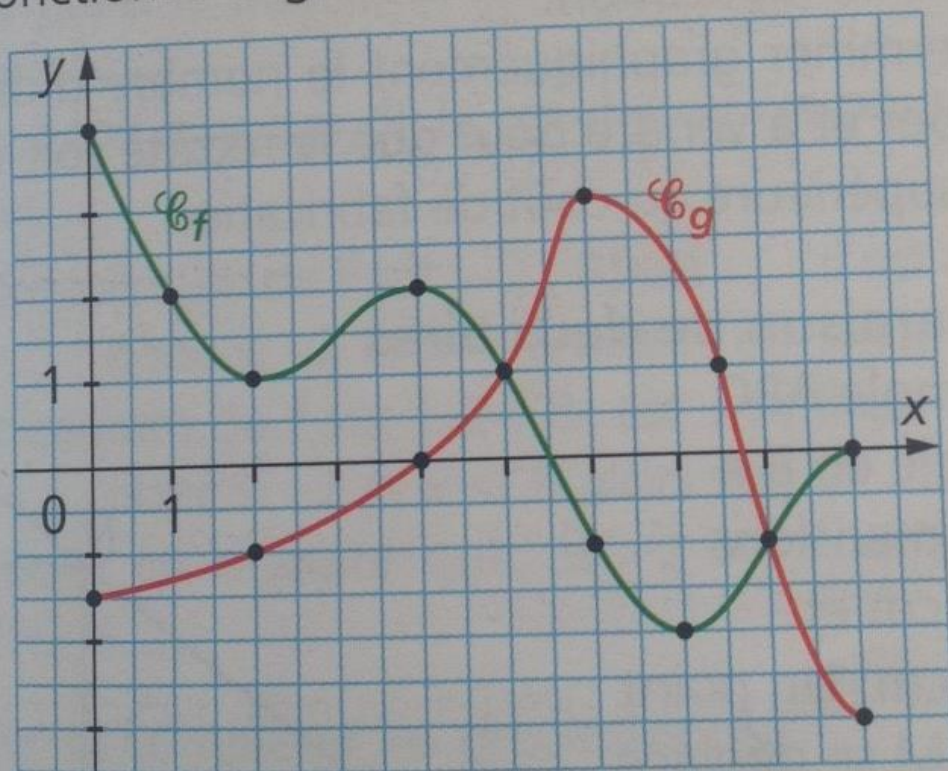
Soit la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $[-5 ; 7]$.



- a) $f(x) = 2$; b) $f(x) < 1$; c) $f(x) \geq -3$; d) $2 \leq f(x) < 3$

2)

On donne les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g définies sur $[0 ; 9]$.



a) $f(x) < g(x)$; b) $g(x) \leq f(x)$; c) $1 < f(x) < g(x)$.

