Chapitre 5 Fonctions, courbes représentatives, résolution graphique d'équations et d'inéquations.

I – Vocabulaire des fonctions

Définition 1

Soit $\mathfrak{D}$ une partie de $\mathbb{R}$.

Définir une fonction notée ***f*** sur $\mathfrak{D}$, c'est associer à chaque réel ***x*** appartenant à $\mathfrak{D}$ un unique réel appelé l'image de ***x*** par la fonction ***f***, que l'on note ***f(x)*****.**

Notation : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to f(x)$ *Remarque* : ***x*** est appelé la variable de la fonction.

Exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to f(x) = x^2$.

Calculer $f(5)$; Quelle est l'image de $-\dfrac{3}{4}$ par ***f*** ?

Méthode : Pour déterminer l'image d'un nombre donné par une fonction ***f***, on remplace ***x*** par la valeur donnée (par l'énoncé) dans l'expression ***f(x)***.

Définition 2

Soit ***f*** une fonction.
L'ensemble de tous les réels qui ont une image par ***f*** est appelé ***l'ensemble de définition*** de la fonction ***f***, on dit encore domaine de définition de ***f***. On le notera, en général, $\mathfrak{D}_f$.

$\mathfrak{D}_f$ est l'ensemble de toutes les valeurs que l'on peut donner à ***x***, pour lesquelles on a le droit d'effectuer le calcul de l'expression ***f(x)***.

Une valeur ***x*** pour laquelle le calcul de l'expression de ***f(x)*** n'est pas possible est appelée une ***VALEUR INTERDITE*** pour la fonction ***f***.

Exemple : Soit ***f*** la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
0 est une valeur interdite pour ***f***, car on ne peut pas diviser par 0.
Pour toutes les autres valeurs du réel ***x***, on peut calculer $\dfrac{1}{x}$, donc la fonction ***f*** est définie sur ……………………., donc $\mathfrak{D}_f$ = …………………………………

On pourra retenir que $\mathfrak{D}_f = \mathbb{R}$ auquel on retire les éventuelles valeurs interdites de ***f***.

On notera: $\mathfrak{D}_f = \mathbb{R} - \{\text{valeurs interdites}\}$ (lire $\mathbb{R}$ privé des valeurs interdites).

*Remarque***: En classe de seconde, les valeurs interdites, et donc les éventuels trous dans les ensembles de définition, apparaissent dès lors qu'il y a des dénominateurs (ils doivent être non nuls) ou des racines carrées (le *radicande*, c'est-à-dire ce qui est sous la racine doit être positif).

Exercice 1

Déterminer pour chacune des fonctions suivantes, son ensemble de définition :

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$; ***b)*** $g(x) = x^2 + 1$; ***c)*** $h(x) = \sqrt{x}$; ***d)*** $i(x) = \sqrt{3-2x}$

✂

Définition 3

Soit ***f*** une fonction, et $\mathfrak{D}_f$ son ensemble de définition.
Soit $y \in \mathbb{R}$. S'il existe $x \in \mathfrak{D}_f$ tel que $y = f(x)$, alors on dit que ***x*** est un antécédent de ***y*** par la fonction ***f***.

Schéma :

Exemple : Soit ***f*** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1$.

Déterminer l'antécédent de 4 par ***f***.

*Méthode : On cherche s'il existe un réel **x** tel que **f(x)** = 4. Donc, on doit résoudre l'équation : **f(x)** = 4, où **x** est l'inconnue, et s'assurer que la (les) solution(s) obtenues sont bien situées dans* $\mathfrak{D}_f$.

Remarque : $f(2) = 5$ équivaut à dire que l'image de 2 par ***f*** vaut 5.
$f(2) = 5$ implique seulement que 2 est ***un*** antécédent de 5 par ***f***.

Exemple : soit ***f*** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.

– 3 a-t-il un antécédent par ***f***? Justifier.

Remarque cruciale : Un nombre donné peut avoir aucun antécédent par une fonction ***f***, ou bien un seul antécédent par ***f***, ou bien plusieurs antécédents par ***f***.

Définition 4 ♥

Soit ***f*** une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$.

On appelle ***courbe représentative de la fonction f***, ou encore, graphe de ***f***, l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x\ ;\ y)$ tels que $y = f(x)$, le réel x prenant toutes les valeurs possibles dans $\mathcal{D}_f$.
On notera C_f la courbe représentative de la fonction ***f*** :

$C_f = \{M(x\ ;\ y)$ tels que $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)\}$. La relation $y = f(x)$ est appelée équation de la courbe C_f.

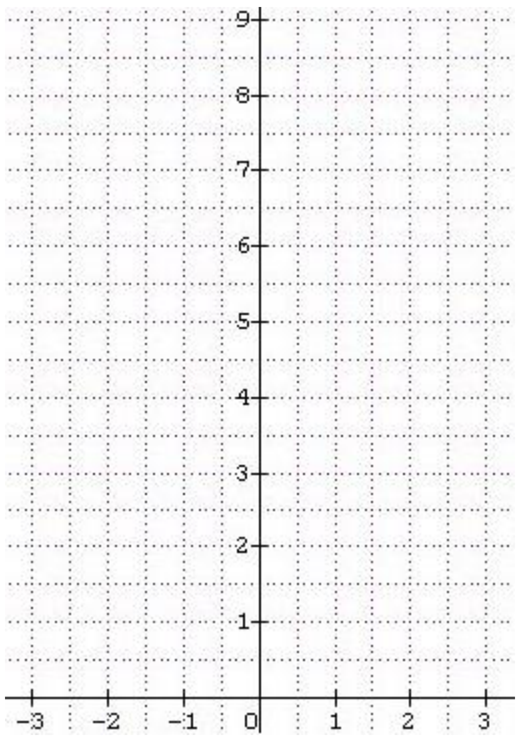
Illustration :

Exemple : Soit ***f*** la fonction définie sur $[-3\ ;\ 3]$ par : $f(x) = x^2$.

Construire sa courbe représentative sur l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$.

Méthode : On commence toujours par faire un tableau de valeurs de la fonction ***f***, qui permet de déterminer et de placer des points situés sur C_f.

Tracé :



Remarques importantes : Comment réussir le tracé de son chef d'œuvre ?

1) Ne pas relier deux points consécutifs par un segment de droite.

2) Une courbe sera d'autant plus précise qu'il y aura de points placés dessus.
Appartenance d'un point à la courbe représentative d'une fonction

A quelle condition un point $M(x\,;y)$ est-il situé sur la courbe C_f représentant f ?

♥♥ ***Règle XXL*** : $M(x\,;y) \in C_f$ ***si et seulement si :*** ....♥♥

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$. On note C_f sa courbe représentative.

a) Le point $A(1\ ;\ 2)$ est-il situé sur C_f ? Justifier.
b) Même question pour le point $B(3\ ;\ 2)$.
c) Déterminer les coordonnées du point C qui a pour abscisse 2 et qui est situé sur C_f.

✂

Exercice 3

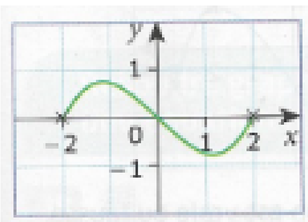
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ et C_g sa courbe représentative.

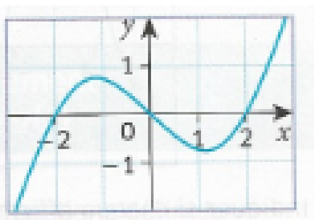
a) Le point $A(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{4}{9})$ appartient-il à C_g ?
b) Existe-t-il un point de l'axe des ordonnées qui appartient à C_g ?

✂

Exercice 4

A l'aide des graphiques suivants, déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f, g dont on donne les courbes représentatives :

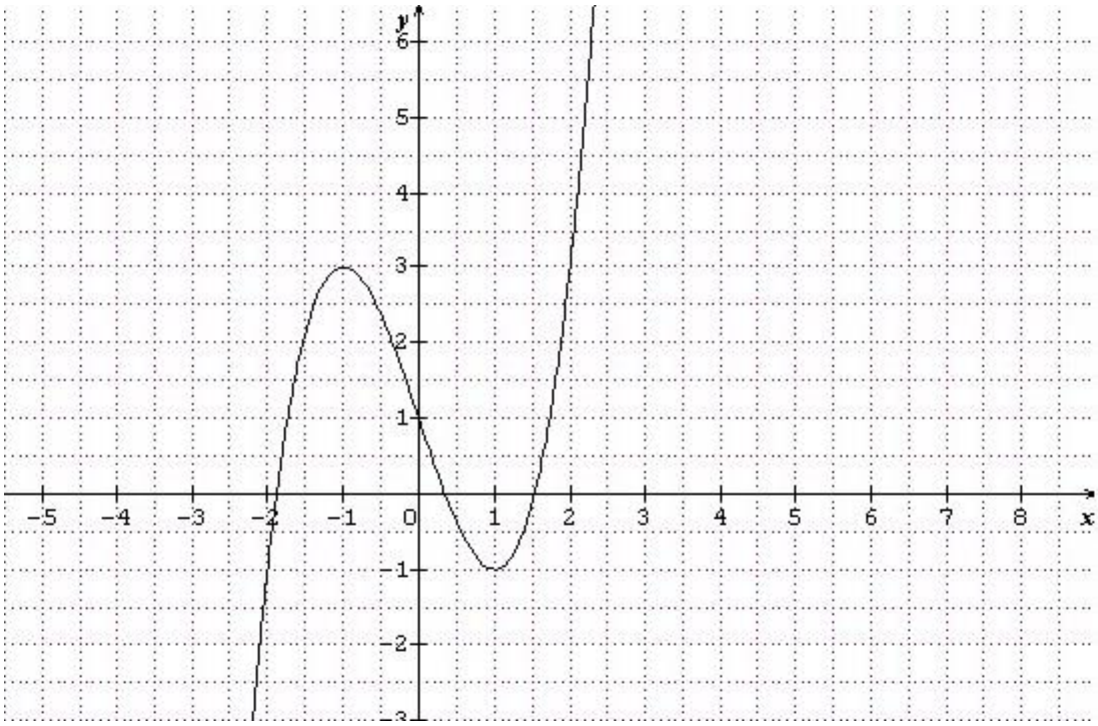




II – Lectures graphiques

Exemple : A l'aide du graphique donné, déterminer :

a) L'image de 2 par la fonction ***f***.
b) L'image de 0 par ***f***.
c) Le(s) antécédent(s) de 3 par ***f***.
d) Le(s) antécédents de $-$ 1 par ***f***.
e) Le point Z($-$1,5 ; 2) appartient-il à la courbe représentant ***f*** ?



- Méthode graphique pour lire l'image d'un réel ***a*** donné :

- Méthode graphique pour déterminer les éventuels antécédents d'un nombre ***b*** donné par une fonction :

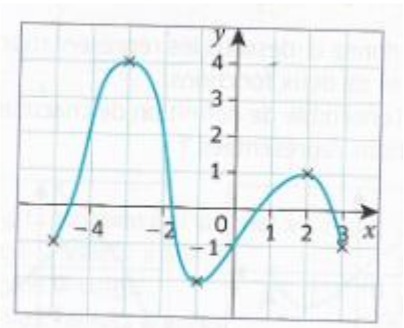
III – Résolution graphique d'équations

Propriété : Equation de la forme $f(x) = k$, où k est un réel donné et f une fonction donnée, et x la variable.

Les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = k$, sont les abscisses des éventuels points d'intersection de C_f et de la droite horizontale d'équation $y = k$, que j'appellerai provisoirement, la droite d'ordonnée constante égale à k.

Illustration :

Exemple : Déterminer graphiquement l'ensemble de définition D_f de la fonction f dont le graphe est donné ci-dessous, puis résoudre graphiquement sur D_f les équations suivantes :



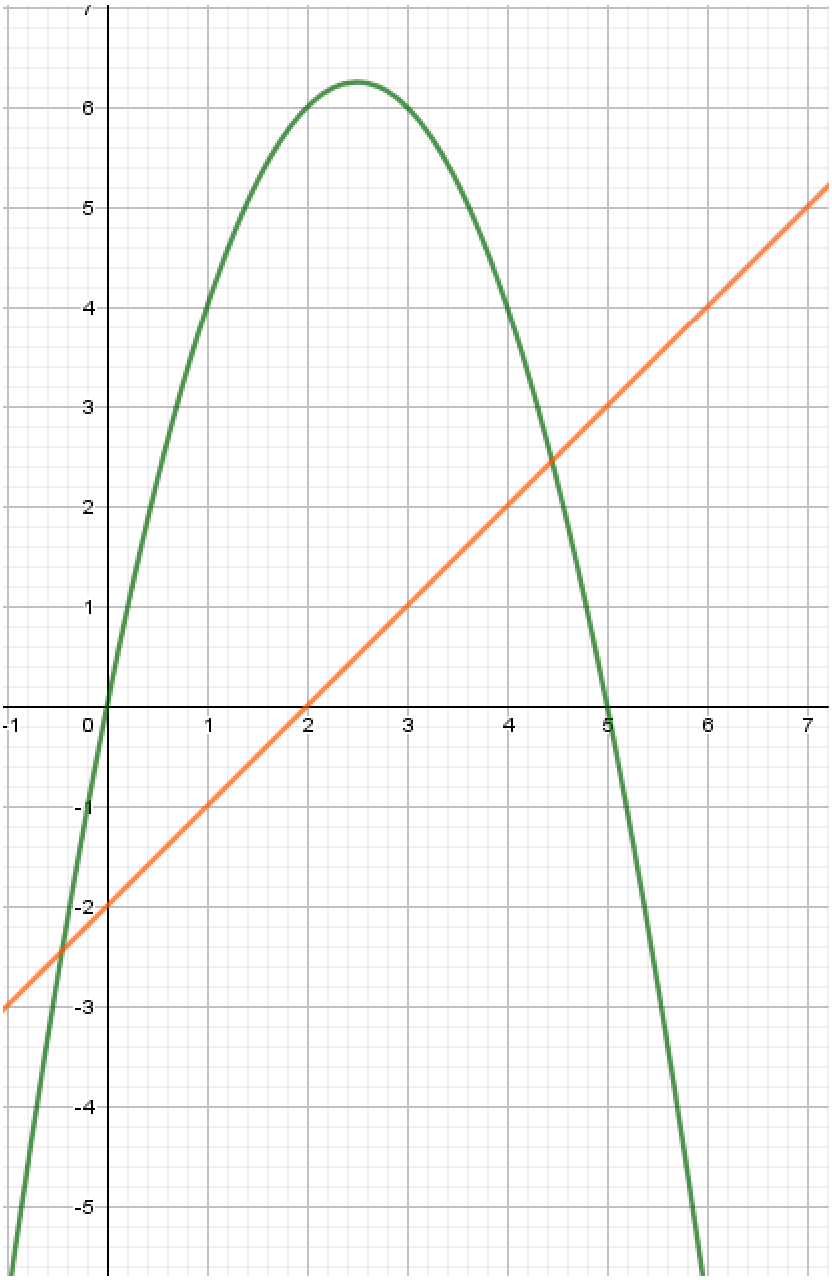
a) $f(x) = 2$; ***b)*** $f(x) = 1$; ***c)*** $f(x) = 0$; ***d)*** $f(x) = -2{,}5$; ***e)*** $f(x) = -2$.

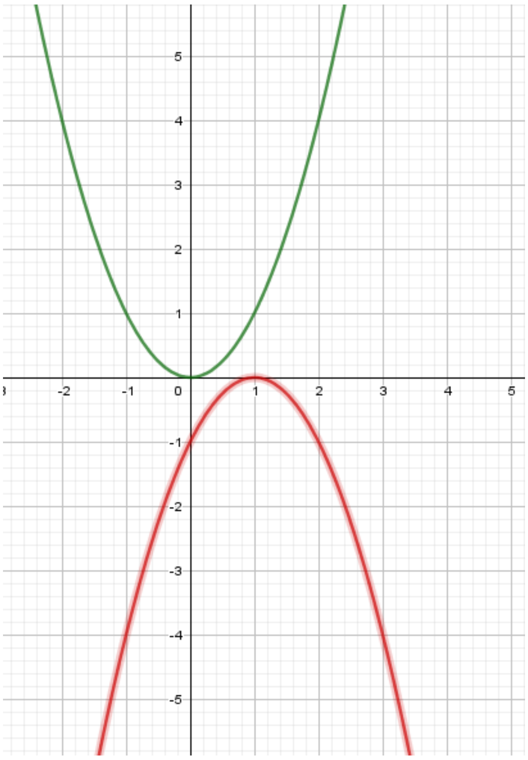
♥♥ ***Propriété*** : **Solutions de l'équation *f(x) = g(x)*, où *f* et *g* sont deux fonctions données, et *x* la variable.**

**Les solutions de l'équation : *f(x) = g(x)* sont …………………………………………………………………
………..**

Illustration :

Exemples : résoudre graphiquement les équations : ***f(x) = g(x)*** sur ℝ dans chacun des cas suivants :



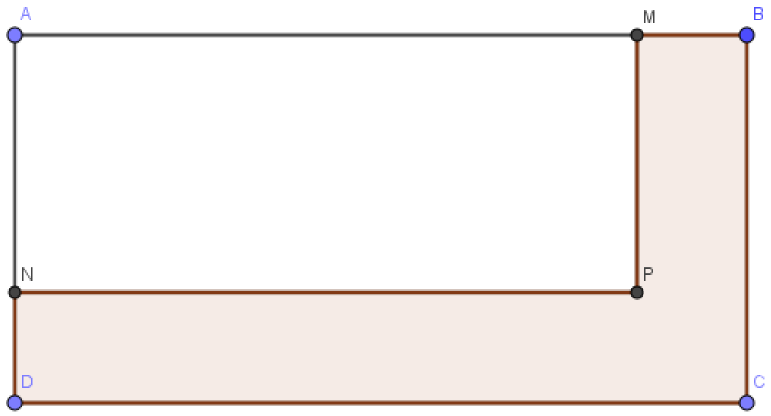


Exercice 5

$ABCD$ est un rectangle tel que : $AB = 10$ ***cm*** et $AD = 5$***cm***.

Soit M un point appartenant au segment $[AB]$, et N un point appartenant au segment $[AD]$ tel que $MB = ND$. On construit enfin le point P tel que $AMPN$ soit un rectangle.

On note $\boldsymbol{x} = MB = ND$.



a) A quel intervalle noté I, le nombre $\boldsymbol{x}$ appartient-il ?

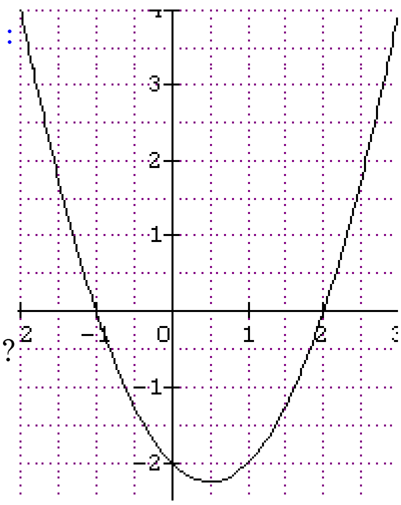
b) Vérifier que pour tout réel $\boldsymbol{x}$ appartenant à I, l'aire du polygone $MBCDNPM$, notée $\boldsymbol{f(x)}$, est égale à $\boldsymbol{-x^2 + 15x}$.

c) Existe-il une (des) valeur(s) de $\boldsymbol{x}$ appartenant à I pour laquelle l'aire de ce polygone soit égale à 8 ***cm²***? Expliquer votre démarche.

✂

IV - Signe des valeurs prises par une fonction, résolution graphique d'inéquations.

En s'aidant de la courbe représentative de la fonction $\boldsymbol{f}$ ci-contre, déterminer :



a) L'ensemble de définition de $\boldsymbol{f}$.

b) Le signe des nombres : ***f(0)*** ; ***f(1)*** ; ***f(-1,5)*** ; ***f(3)***.

c) Sur quel intervalle les valeurs prises par la fonction $\boldsymbol{f}$ sont-elles négatives ?

d) Sur quel(s) intervalle(s) les valeurs prises par $\boldsymbol{f}$ sont–elles positives ?

e) On résume l'étude du signe des valeurs prises par la fonction $\boldsymbol{f}$ en faisant le tableau suivant, appelé …………………………………….. :

Exercice 6

f est une fonction définie sur $[-2\ ;\ 5]$ qui a pour tableau de signes :

x	-2		0		2		5
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

1)
a) Pour quelles valeurs de x a-t-on ***f(x)*** $= 0$?

b) Sur quels intervalles a-t-on ***f(x)*** > 0 ?

c) Sur quel intervalle a-t-on ***f(x)*** < 0 ?

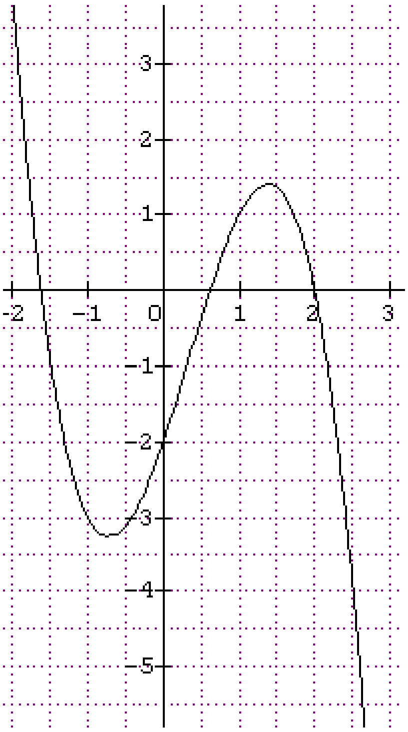
d) Quel est le signe de ***f(3)*** ? Celui de ***f(-1)*** ?

2) Construire une courbe représentative possible pour *f* dans un repère orthonormé.

✂

Exercice 7

Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$ les inéquations : ***f(x)*** < 0, puis ***f(x)*** ≥ 0, puis dresser le tableau de signes de la fonction *f* dont on vous donne le graphe :



Remarque cruciale : Soit ***f*** une fonction définie sur un intervalle I.

$f(x) < 0$ sur I équivaut graphiquement à……………………………………………………..
……………………………………………………………………………..

$f(x) > 0$ sur I équivaut graphiquement à
…………………………………………………………………………………………………

$f(x) = 0$ équivaut graphiquement à ……………………………………………………………………….

Propriété fondamentale

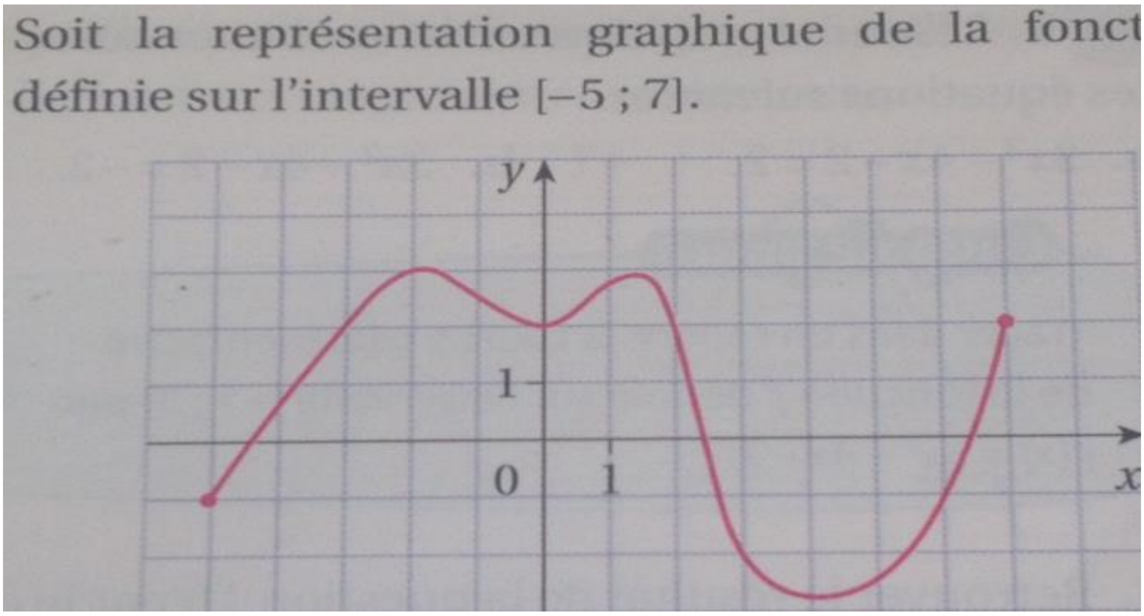
Soit ***f*** et ***g*** deux fonctions définies sur un même intervalle I, et ***k*** un réel fixé.

- Résoudre sur I l'inéquation : ***f(x) < k*** revient…..
………
- Résoudre sur I l'inéquation : ***f(x) > k*** revient à…………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………...
- Résoudre sur I l'inéquation : ***f(x) < g(x)*** revient à : ……………………………………………
……………………………………………………………………………………………………...
- Résoudre sur I l'inéquation : ***f(x) > g(x)*** revient à : ……………………………………………….
……………………………………………………………………………………………………….

Illustrations et justification :

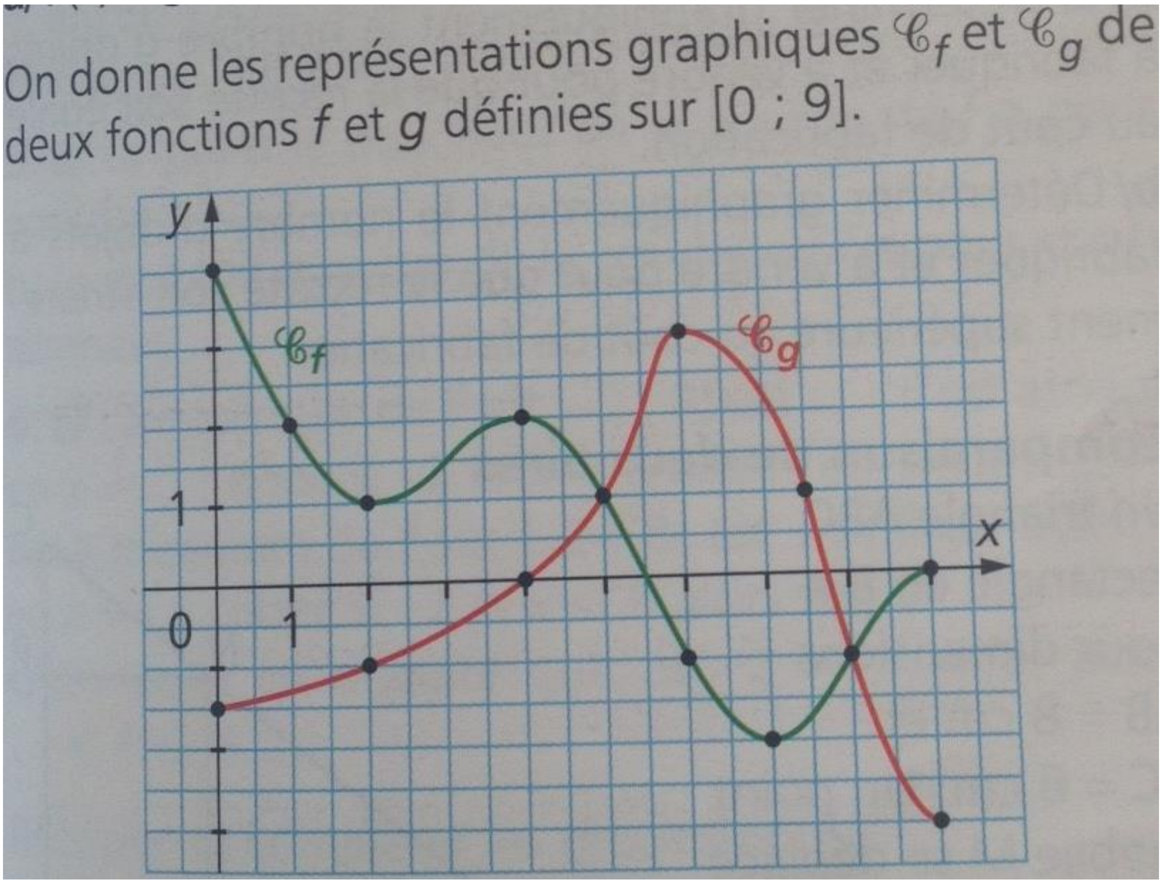
Exercice 8

1) En s'aidant des graphiques ci-dessous, résoudre graphiquement les équations et inéquations demandées :



a) $f(x) = 2$; ***b)*** $f(x) < 1$; ***c)*** $f(x) \geq -3$; ***d)*** $2 \leq f(x) < 3$

✂



a) $f(x) < g(x)$; ***b)*** $g(x) \leq f(x)$; ***c)*** $1 < f(x) < g(x)$.

V – Tableaux de signes et inéquations résolues algébriquement

Nous allons, à l'aide d'un tableau de signes, résoudre des inéquations un peu plus complexes, du type :

$(2x+1)(x+3)>0$ ou encore $\frac{x-1}{2x+5} \leq 0$.

Rappelons ce qu'est-ce qu'un tableau de signes :

C'est un tableau qui résume les signes pris par une expression algébrique ***A(x),*** selon les intervalles auxquels appartient x, avec les conventions suivantes : mettre un signe + pour les valeurs de x telles que $A(x)>0$, mettre un signe − pour les valeurs de x telles que $A(x)<0$, et enfin mettre des zéros sous les valeurs de x qui annulent l'expression ***A(x).***

Exemples

1) Soit ***A(x)*** une expression algébrique, avec x appartenant à $\mathbb{R}$:

On suppose que :

- ✓ ***A(x)*** est de signe positif lorsque x appartient à l'intervalle : $]1\ ;\ +\infty[$.
- ✓ ***A(x)*** est de signe négatif lorsque x appartient à l'intervalle : $]-\infty\ ;\ 1[$.
- ✓ ***A(1)*** = 0.

On résume cela en construisant le tableau suivant, appelé tableau de signes de l'expression ***A(x)*** :

✂

2) On donne les tableaux de signes d'expressions algébriques ***A(x)*** et ***B(x)*** définies sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de $A(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $B(x)$		$+$	0	$-$	

Donner, en justifiant, le tableau de signes de l'expression ***A(x)×B(x)*** sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9

A l'aide d'un tableau de signes, résolvons l'inéquation suivante : $(3x + 6)(-2x + 5) > 0$.

✂

Exercice 10

A l'aide d'un tableau de signes, résolvons l'inéquation suivante : $\dfrac{x+1}{2x+4} \geq 0$.

✂

Exercice11

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante, en détaillant les étapes de résolution : $\dfrac{x}{4-x} \leqslant -1$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\dfrac{3}{x+2} \leq \dfrac{1}{-4x+1}$.

✂

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - x^2$.

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère du plan.

0) Factoriser au mieux cette expression.

1) Etudier avec soin la position relative de C_f et de l'axe des abscisses. Une étude algébrique est ici attendue.

2a) Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse et justifier :

- Le cube de n'importe quel nombre réel est supérieur ou égal au carré de ce nombre.
- Il existe des réels dont le cube est strictement inférieur à leur carré.

✂

Exercice 13

1a) A l'aide du logiciel *Geogebra* 5 par exemple, construire les courbes représentatives C_f et C_g des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x + 3$. Les joindre à la copie.

1b) Conjecturer graphiquement la position relative de C_f et C_g sur $\mathbb{R}$.

2a) Vérifier que pour tout réel x, on a : $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$.

2b) En déduire la position relative des courbes C_f et C_g. On attend ici une étude algébrique.