

Introduction : Les notions de pourcentage et de proportion sont omniprésentes dans la vie quotidienne.

Voici quelques exemples : les océans occupent les $\frac{2}{3}$ de la surface terrestre.

60 % des bacheliers ont eu une mention au baccalauréat en 2021.

I – Notion de proportion et de pourcentage

Vocabulaire : Une population est un ensemble dont les éléments sont appelés les
Le nombre total d'individus d'une population donnée est appelé de cette population.

Contrairement à ce que pourrait laisser penser la définition, une population n'est pas nécessairement formée d'entités vivantes !

Exemple : Les élèves de seconde du lycée Benoît forment une population d'effectif 315.

L'élève *A.B* de seconde 3 est un individu de cette population.

Les 15 stylos de ma trousse forment une population d'effectif égal à

Définition

On appelle sous-population d'une population *E* toute partie *A* formée de certains d'individus de *E* : *A* est incluse dans *E* !

Illustration ensembliste :

Exemple : Notons *E* la population formée par les élèves de seconde du lycée Benoît à la rentrée 2020, et *A* les élèves de seconde du lycée qui sont externes : *A* est une sous-population de *E*.

Les 4 stylos bleus de ma trousse constituent une sous-population des 15 stylos de ma trousse.

✂ Exercice 1

Le tableau ci-dessous donne une estimation de la répartition de la population française au 01/01/2019, par sexe et groupe d'âge.

	Femmes	Hommes	Ensemble
Moins de 20 ans	7897148	8260779	16158197
De 20 à 64 ans	19072541	18348624	37421165
65 ans et plus	7628209	5785128	13413337
Population totale	34598168	32394531	66992699

a) Combien d'individus la population totale comprend-elle de personnes ?

b) Comment se nomme le groupe d'individus formé par les jeunes de moins de 20 ans ? Quel est son effectif ?

c) Quelle est la proportion du groupe formé par les jeunes de moins de 20 ans au sein de la population totale ?

d) On s'intéresse maintenant au groupe formé par les personnes de 20 à 64 ans. Trouver la proportion de femmes au sein de ce groupe.

Définition 1

Soit E une population de référence (ensemble E) contenant N éléments, et A une sous-population de E d'effectif n .

La proportion (notée p) des éléments de A parmi ceux de E est égale au quotient..... : ♥ $p =$ ♥

Remarque : une proportion p n'a pas d'unité et pour ce réel p on a toujours l'encadrement suivant :
.....

Bien souvent, et afin de rendre l'information chiffrée plus parlante, on exprimera **sous forme de pourcentage** une proportion : cela permet de se faire une meilleure idée de ce que représente cette proportion.

Rappel : Comme son nom l'indique, pourcent peut être décomposé en les termes : pour un nombre de 100 ou encore par tranche de 100, ou encore : ramené à un effectif de référence égal à 100, dans des proportions égales.

Par exemple : 30 % de mon budget sert à payer mon loyer signifie qu'à chaque tranche de 100€ perçue de mon salaire, je mets 30€ pour mon loyer.

Exercice 2

Dans une revue de 180 pages, il y a 52 pages de publicité.

Quel pourcentage les pages de publicité occupent-elles dans cette revue ?

Définition 2

Avec les mêmes notations que celles de la définition 1, la proportion p d'individus du groupe A parmi ceux de E peut être exprimée en pourcentage noté t .

On a donc : $p = \frac{n}{N} = \frac{t}{100}$, et donc : $t =$

Exemples célèbres

La moitié d'une quantité correspond à% de cette quantité.

Le quart, respectivement les trois quarts d'une quantité correspondent respectivement à % de cette quantité (respectivement % de cette quantité).

Rappel : Appliquer un pourcentage :

Exercice 3

Dans un lycée de 1250 élèves, 34 % des élèves sont externes.

Quel est le nombre d'élèves externes de ce lycée ?

Règle 1

Pour calculer $x\%$ d'un nombre Q donné, il suffit de faire :



II – Notion de proportion de proportion et de pourcentage de pourcentage

Exemple d'introduction

14600 véhicules ont franchi un péage autoroutier le 30 Août 2021.

85 % des véhicules étaient des voitures, et 60 % de ces voitures étaient munies d'un badge de télépéage.

a) Combien de voitures se sont présentées à ce péage en ce jour ?

b) Calculer le nombre de voitures munies d'un badge de télépéage.

c) En déduire la proportion, exprimée en pourcentage, de voitures munies d'un badge de télépéage par rapport à l'ensemble des véhicules.

d) Calculer $14600 \times \frac{85}{100} \times \frac{60}{100}$. En déduire une autre manière de calculer la proportion demandée à la question c).

e) 70 % des véhicules qui ne sont pas des voitures étaient munis d'un badge de télépéage.

Déterminer le pourcentage que représentent ces véhicules (non voitures) munis d'un badge par rapport à la population totale étudiée.

✂

Propriété

On considère un ensemble E ayant N éléments. Soit A une partie de E , et B une partie de A .

On note p_A la proportion des éléments de A dans E , et p_B la proportion des éléments de B dans A .

Alors, la proportion des éléments de B dans E est égale à

✂

Exemple

60 % des élèves d'un lycée sont des filles. Parmi ces filles, 34 % sont externe.

Déterminer quel pourcentage représente le groupe des filles externe dans ce lycée.

Sachant qu'il y a 1500 élèves au lycée, déterminer le nombre de filles externe de ce lycée.

✂

Exercice 4

Calculer mentalement : 20 % de 80 % ; 90 % de 12 %.

III – Taux d'évolution

Définition

Une évolution fait passer la valeur initiale notée V_i d'une quantité à une valeur finale notée V_f .

La **variation absolue** entre V_i et V_f est égale au nombre :

Cette dernière a donc la même unité que la quantité étudiée.

Exemple

Le prix du baril de pétrole au 01/10/2018 était de 73,68 \$.

Au 01/01/2019, le prix du baril était de 46,82 \$.

Déterminer la variation absolue du prix du baril de pétrole entre ces deux dates. Constat ?

Propriété

Lorsque la variation absolue d'une quantité est, la valeur de la quantité

Lorsque la variation absolue d'une quantité est, la valeur de la quantité

Définition du taux d'évolution d'une quantité

Une évolution fait passer la valeur initiale notée V_i d'une quantité à une valeur finale notée V_f .

La variation relative de V_i à V_f que l'on notera t , est égale au quotient :

Le nombre $p = \dots\dots\dots$ est appelé **le pourcentage d'évolution** de V_i à V_f .

Exemple

Quelques jours après la rentrée, le nombre d'élèves d'une classe passe de 32 à 34. Déterminer le pourcentage d'évolution du nombre d'élèves de cette classe.

✂

Remarques : Si $t > 0$, une variation de taux t correspond à.....

Si $t < 0$, une variation de taux t correspond à

L'intérêt des taux d'évolutions, contrairement aux variations absolues, est de permettre de comparer des évolutions dans des situations différentes.

✂

Exercice 5

Le prix d'un article passe de 168€ au 01/01/2019 à 160€ au 01/06/2019.

Déterminer le pourcentage d'évolution de ce prix entre ces deux dates.

Exercice 6

Le tableau ci-dessous donne les espérances de vie à la naissance pour des individus nés en France en l'an 2000 et en l'an 2015.

<i>Année de naissance</i>	<i>Hommes</i>	<i>Femmes</i>
<i>2000</i>	<i>75,3</i>	<i>82,8</i>
<i>2015</i>	<i>79</i>	<i>85,1</i>

Comparer les taux d'évolution de l'espérance de vie des hommes et celui des femmes entre ces années.

✂

IV – Coefficient multiplicateur lié à une évolution

Définition

Le nombre par lequel il faut multiplier une valeur initiale V_i pour obtenir sa valeur finale V_f est appelé coefficient multiplicateur et noté CM .

On a donc : = ou encore : $CM = \dots\dots\dots$

Schéma fondamental :

Exercice 7

Le prix d'un article passe de 36 € à 37,50 €. Déterminer le coefficient multiplicateur associé à cette évolution de prix.

Déterminer le pourcentage p d'évolution de ce prix. Conclusion ?

✂

Propriété

Soit t le taux d'évolution d'une valeur V_i à une valeur V_f , et CM le coefficient multiplicateur qui permet de passer de V_i à V_f .

On a la relation suivante :

Preuve :

Ainsi les notions de taux d'évolution et coefficients multiplicateur sont étroitement liées !

Exercice 8

Un pantalon a un prix de 45 €, et une chemise un prix de 50 €.

Le prix du pantalon augmente de 7 %, et celui de la chemise diminue de 6 %.

Déterminer le coefficient multiplicateur associé à chacune de ces variations.

Calculer le prix du pantalon et celui de la chemise après ces changements de prix.

Remarque

Pour une augmentation, on a : $CM \dots\dots 1$; Pour une diminution, on a : $CM \dots\dots 1$

♥♥♥♥ Règle fondamentale ♥♥♥♥

a) Augmenter de $a\%$ une grandeur Q , revient à multiplier Q par :

b) Diminuer de $b\%$ une grandeur Q , revient à multiplier Q par :

Exemple mentaux:

Augmenter de 10% un prix revient à

Diminuer de 30% un prix revient à

Multiplier un prix par $1,32$ revient à

Multiplier un prix par $0,79$ revient à

Multiplier par 2 un prix revient à

Exercice 9

Compléter le tableau suivant en écrivant le calcul que vous avez fait à chaque fois.

Prix initial	Prix final	Pourcentage de variation	Coefficient multiplicateur
110 €		-18 %	
	47 €	+28,2 %	
850 €			1,915
	100 €		0,546
20 €	23 €		
120 €	105 €		

Exercice 10

En France, le taux de la *TVA* (taxe de valeur ajoutée) est un impôt dont le taux est égal à 20 %.

Ce dernier s'applique sur le prix hors taxe (*HT*) à la majorité des articles achetés, et on obtient le prix final de l'article appelé prix *TTC* (toutes taxes comprises), c'est-à-dire ce que vous payez lors de l'achat d'un article !

a) Le prix hors taxe d'un véhicule est 9500€. Déterminer le prix *TTC* de ce véhicule.

b) Le prix d'un voyage est de 2300€ *TTC*. Déterminer le prix hors taxe de ce voyage.

✂

V- Evolutions successives

Exemple

Un article coûte 100€ au mois de Septembre. Son prix augmente une première fois de 20 % au mois d'Octobre.

Le mois suivant, le prix de cet article augmente encore de 10 %.

Déterminer le prix de l'article au mois de Novembre, ainsi que le pourcentage d'évolution de ce prix entre Septembre et Novembre. Le résultat vous surprend-il ?

Déterminer une relation entre les nombres C_1 , C_2 et C_3 qui désignent respectivement le coefficient multiplicateur du prix de Septembre à Octobre, celui d'Octobre à Novembre et enfin celui de Septembre à Novembre.

✂

Propriété

Pour deux évolutions successives de coefficients multiplicateurs respectifs CM_1 et CM_2 , l'évolution globale a pour coefficient multiplicateur global le nombre CM , avec : $CM =$

Illustration et justification :

Exemple

Auguste est ravi : il a bénéficié de deux réductions successives pour l'achat d'un ordinateur : 30 % de solde d'été, et 10 % supplémentaire obtenus en caisse grâce à sa carte de fidélité.

Auguste affirme avoir bénéficié d'une réduction de 40 % : qu'en pensez-vous ?

●

Exercice 11

Le prix d'un article augmente de 10 % puis diminue de 10 %.

Son prix final est-il égal à son prix initial ? Justifier.

Exercice 12

La valeur en € d'une action subit les variations suivantes en une semaine :

Lundi : +2% ; Mardi : + 4% ; Mercredi : -5 % ; JEUDI +3% ; Vendredi : - 6 %.

Déterminer si au cours de cette semaine l'action s'est appréciée (= a gagné de la valeur) ou si elle s'est dépréciée (= a perdu de sa valeur).

✂

Exercice 13

Dans une entreprise *A*, les salaires ont augmenté de 2 % entre 2017 et 2018 puis de 3 % entre 2018 et 2019.

Dans une entreprise *B*, les salaires ont augmenté de 4 % entre 2017 et 2018 puis de 1 % entre 2018 et 2019.

Dans quelle entreprise les salariés ont-ils été globalement plus augmentés entre 2017 et 2019 ?

✂

Exercice 14

Un livret Jeune a un taux d'intérêt de 2,5 %. Cela signifie que chaque année, la banque verse sur votre compte une somme d'argent, appelée intérêt, à hauteur de 2,5 % du solde que présente votre compte.

Vous décidez de placer 600€ sur un livret Jeune et de ne plus y toucher.

Quel sera votre capital au bout de : 1 an ? 3 ans ? 5 ans ? 10 ans ?

Trouver une relation qui donne le capital dont vous disposerez au bout de n années.

A l'aide d'une calculatrice, évaluer le nombre d'années nécessaires à une augmentation de 50 % du capital initial.

✂

VI – Taux d'évolution réciproque

Exemple

Le prix d'une paire de chaussures passe de 100€ à 120€.

Déterminer le taux de remise à effectuer pour ramener la paire de chaussure à son prix initial.

✂

Définition

Soit une évolution de coefficient multiplicateur CM qui fait passer une valeur de V_i à V_f .

L'évolution réciproque est celle qui fait passer de la valeur V_f à la valeur V_i . On note CM' le coefficient multiplicateur de cette évolution réciproque.

On a : $CM' = \dots\dots\dots$

Le taux t' d'évolution réciproque s'exprime en fonction de CM' : $t' =$

Illustration

Exercice 15

En arrondissant au dixième près, donner :

Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 8 %, puis le taux d'évolution réciproque associé à cette hausse.

Déterminer le taux d'évolution réciproque d'une baisse de 15 %.

✂

Exercice 16

Chaque année, un webmestre fait le bilan concernant l'attractivité de son site web.

Entre 2016 et 2017, le nombre de connexions au site a diminué de 12 %.

1) Déterminer, à 0,1 % près, le pourcentage d'augmentation nécessaire entre 2017 et 2018 pour revenir au nombre de connexions initial.

2) Entre 2018 et 2019, le nombre de connexions a augmenté de 4,5 %, pour s'établir à 1463 connexions par jour. Combien y avait-il de connexions par jour à ce site début 2018 ?