

I- Rappels sur les égalités

Une égalité est une entité contenant le **signe égal** qui est noté $=$!

Une égalité est soit vraie (ou vérifiée) soit fausse !

Par exemple, l'égalité $a = 2$ n'est vraie que si l'on donne au réel a la valeur 2.

L'égalité $x^2 = 2x$ est fausse lorsque $x = 5$ car :

Rappelons des règles sur les égalités, qui seront à la base de la résolution des équations :

Règles fondamentales sur les égalités

Soient a , b et c des réels quelconques.

i) On peut **ajouter** à **chacun des deux membres** d'une égalité le **même nombre**, on obtient une égalité équivalente, c'est-à-dire de même nature (vraie ou fausse).

$a = b$ équivaut à, ce que l'on notera :

⚡* Le symbole \Leftrightarrow n'a pas la même signification que le signe $=$! Ne pas confondre les deux.

On pourra mettre le symbole \Leftrightarrow entre deux égalités de même nature.

ii) On peut **soustraire** à **chacun des deux membres** d'une égalité le **même nombre** :

$a = b$ équivaut à, ce que l'on notera :

iii) On peut **multiplier** (respectivement **diviser**) **chacun des deux membres** d'une égalité par **le même nombre NON NUL**, c'est-à-dire différent de 0 !

Pour tout réel d non nul, $a = b$ équivaut à, ce que l'on notera :

Pour tout réel d non nul, $a = b$ équivaut à, ce que l'on notera.....

Grâce à ces règles, on va facilement réussir à isoler une variable, ce que l'on fait classiquement en résolvant des équations.

Exercice 1 En utilisant les règles sur les égalités, isoler dans chacune des expressions suivantes la variable demandée :

1) Isoler a dans l'expression : $a + 7 = 2,5$

2) Isoler b dans l'expression : $3b = 5$.

3) Isoler c dans l'expression : $3c + 5 = c + 11$.

Pour les exemples suivants, toutes les variables sont différentes de zéro (non nulles).

4) $d = Vt$: isoler t ; 5) $V = xyz$: isoler y ; 6) $PV = nRT$: isoler R ; 7) $S = \pi R^2 H$: isoler R sachant que S , R et H sont positives ; 8) $ax + by = c$: isoler y .

✂-----

II- Les équations du premier degré à une inconnue

Voici quelques équations simples rencontrées au collège : $3x + 1 = 4$; $2x - 5 = x + 4$.

Définitions

Une équation d'inconnue x est une égalité qui peut être vraie pour certaines valeurs de x , et fausse pour d'autres.

Résoudre dans \mathbb{R} une équation d'inconnue x , c'est déterminer, si elles existent, toutes les valeurs de x pour lesquelles l'égalité de l'énoncé est vraie.

Ces éventuels nombres forment l'ensemble des solutions de l'équation.

Deux **équations** sont **équivalentes** lorsqu'elles ont **même ensemble de solution**.

Méthode de résolution : Pour résoudre une équation, on raisonne par équivalence, c'est-à-dire qu'on transforme, à l'aide des règles sur les égalités vues précédemment, l'équation initiale en une équation plus simple qui a le même ensemble de solution que l'équation initiale, dans le but de se ramener à une équation triviale de la forme : $x = \dots$

Lorsqu'on a abouti à cette dernière écriture, on a résolu l'équation initiale, il ne reste plus qu'à conclure, en mentionnant l'ensemble des solutions de l'équation, que l'on notera : $\mathcal{S} =$

☞ **On retiendra donc que lorsqu'on demande de résoudre une équation, il faut isoler, si cela est possible, l'inconnue.**

Exercice 2

Résoudre dans \mathbb{R} chacune des équations suivantes :

a) $2x - 7 = 0$; b) $3x + 4 = 11$; c) $2x = 11$; d) $\frac{x}{3} - 5 = 2$; e) $4x + 1 = 2x + 7$

f) $5(2x - 1) = 6 - (2x - 1)$; g) $2(x + 4) + 1 - 5x = 3(1 - x) + 7$; h) $3(2x + 4) - 2x = 14 - 2(1 - 2x)$.

✂-----

Les équations sont un outil puissant pour résoudre des problèmes en mathématiques !

Exercice 3

Si on augmente la longueur de chacun des côtés d'un carré de 3 mètres, son aire augmente de $45,6 \text{ m}^2$. Quelle est la longueur des côtés du carré initial ? Justifier.

✂-----

Exercice 4

Un groupe d'ami va déjeuner dans un bistrot. Chacun choisit la formule du jour à 11,90 €.

Au moment de payer, deux personnes ont oublié leur portefeuille : les autres doivent alors payer 1,70€ de plus chacun pour régler la note.

Combien y avait-il d'amis dans ce groupe lors de ce déjeuner ?

✂-----

Exercice 5

Je fais les courses, et dépense le quart de mon argent pour un premier achat, puis 10€ pour un second achat.

Je rentre avec deux fois plus d'argent que j'en ai dépensé pour faire ces deux achats.

Avec combien d'argent étais-je parti faire mes courses ?

✂-----

III- D'autres types d'équations**A- Equation avec fractions**

Nous allons faire quelques rappels sur les fractions au préalable :

Révisions : règles et opérations algébriques sur les fractions

👉 *Fondamental et d'usage fréquent tout au long de l'année !*

Pour tout entier a , et tout entier b , c et k non nuls on a les règles suivantes concernant le calcul fractionnaire :

$$i) \boxed{\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}} ; \quad ii) \boxed{\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}} ; \quad iii) \boxed{\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}}$$

En français :

i) Règle d'invariance des fractions :

On ne change pas la valeur d'une fraction en son numérateur et son dénominateur par le même nombre non nul.

ii) et iii) Pour additionner (respectivement soustraire) deux fractions ayant le même dénominateur, il suffit d'additionner (respectivement soustraire les numérateurs entre eux, et de conserver le même dénominateur.

I. Addition de fractions

Pour additionner deux fractions, il est nécessaire de les réduire à un même dénominateur, appelé dénominateur commun. On utilise ensuite les règles *ii)* et *iii)* après s'être ramené à un même dénominateur, vu que les deux fractions ont alors le même dénominateur !

Comme dénominateur commun, on prend fréquemment le plus petit multiple commun aux deux dénominateurs, et on utilise la règle *i)* rappelée en amont.

Exemple : Exprimer, sous forme de fraction irréductible :

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \quad ; \quad \frac{15}{8} - \frac{11}{12} =$$

$$\frac{8}{3} + \frac{7}{18} - \frac{4}{9} =$$

$$\frac{1}{209} - \frac{1}{210} =$$

Dans le dernier exemple, et *en dernier recours*, on pourra *toujours* choisir comme dénominateur commun le

2. Multiplication de fractions

Règle : pour multiplier deux fractions, on multiplie respectivement les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Pour tous entiers a, b, c et d , avec b et d non nuls, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \dots\dots\dots$ En particulier : $a \times \frac{c}{d} = \dots\dots\dots$

On essaiera, avant de se lancer dans les multiplications, de trouver si on peut simplifier, c'est-à-dire en divisant par un diviseur commun, un numérateur et un dénominateur.

Exemples : Calculer sous forme de fraction irréductible :

$$\frac{3}{4} \times \frac{7}{9} =$$

$$\frac{3}{8} \times \frac{7}{6} \times \frac{4}{9} =$$

$$-\frac{7}{4} \times \frac{5}{-8} \times 6 =$$

3. Division de fractions

Rappel : soit a et b deux entiers non nuls.

L'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ est la fraction qui multipliée par $\frac{a}{b}$ donne 1 comme produit :

L'inverse de $\frac{a}{b}$ est donc égal à

Règle : pour tous entiers a, b, c et d non nuls : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \dots\dots\dots$

ce qui se note encore : $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dots\dots\dots$

Le trait de la division effectuée (= division principale) est de taille plus grande que celui de chacune des fractions, et doit toujours être situé au même niveau que le signe = !

Pour diviser une première fraction par une seconde, il suffit donc de multiplier la première fraction par de la seconde fraction.

Ainsi, la division n'est rien d'autre qu'une multiplication !

Exemples : Calculer sous forme de fraction irréductible :

$$\frac{17}{25} \div \frac{34}{27} =$$

$$\frac{13}{\frac{3}{26}} =$$

4. Règles de priorité entre opérations

Rappelons *qu'en l'absence de parenthèses, la Multiplication est prioritaire sur l'Addition* : on effectue d'abord Les multiplications, et ensuite les additions.

Exemples :

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} =$$

$$2 - \frac{3}{4} \times \frac{1}{12} =$$

En présence de parenthèses, on effectue prioritairement les opérations situées à l'intérieur de ces dernières, en respectant la précédente règle une fois à l'intérieur de ces dernières !

Exemples : Calculer sous forme de fraction irréductible :

$$\left(-\frac{7}{6} + \frac{3}{5}\right) \times \frac{1}{4} =$$

Terminons les rappels par une règle fondamentale en mathématiques, la règle des produits en croix, qui dit que deux fractions sont égales si et seulement si les produits en croix sont égaux.

♥♥♥ Règle des produits en croix ♥♥♥

Pour tous entiers a, b, c et d , avec b et d non nuls,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si et seulement si (= équivaut à dire que) } \dots\dots\dots$$

Remarque : d'où vient ce terme étrange "produits en croix" ?

Preuve de la propriété des produits en croix :

Exercice 6

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$a) \frac{2x}{3} = \frac{3}{7} ; \quad b) \frac{x-3}{5} = \frac{1-5x}{3} ; \quad c) \frac{x}{3} = \frac{1}{4} - \frac{x}{5} ; \quad d) \frac{x+2}{3} - \frac{3(x-2)}{4} = \frac{-7x+2}{12} + 2$$

✂-----

Exercice 7 (introduction au raisonnement par l'absurde).

Les fractions : $\frac{108}{109}$ et $\frac{107}{106}$ sont-elles égales ? Justifier.

✂-----

B- Equations produit nul**Rappel important : le théorème du produit nul**

$A(x) \times B(x) = 0$ où $A(x)$ et $B(x)$ sont des expressions équivaut à : $A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$.

En français, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

Exemple : Résoudre dans \mathbb{R} les équations : $(2x+5)(-3x+7) = 0$; $(2x+5)+(-3x+7) = 0$.

$$(3x+1)^2 - 4(3x+1) = 0 \quad ; \quad 4(x-3)(x+2) - (x^2-9) = 0$$

✂-----

Exercice 8

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $(2x-5)^2 = 36$.

Méthode : Lorsqu'on doit résoudre une équation où figurent des x^2 (*non simplifiables*), on procédera, à ce stade de l'année, en deux étapes :

Etape 1.....

Etape 2.....

C-Equations quotient nul

Rappelons que la division par 0 n'existe pas !

Définition

Soit $A(x)$ et $B(x)$ deux expressions algébriques.

Pour que l'écriture fractionnaire $\frac{A(x)}{B(x)}$ soit calculable il faut que son dénominateur $B(x)$ soit différent de 0.

Toute valeur x telle que $B(x) = 0$ est appelée une pour l'écriture fractionnaire $\frac{A(x)}{B(x)}$.

✎ En mathématiques, dès qu'on est en présence d'un dénominateur, il faudra toujours se poser la question : ce dernier est-il différent de 0 ?

Exemple

Déterminer la valeur interdite de l'expression $\frac{2x-1}{4x+1}$, puis toutes les valeurs de x pour lesquelles il est licite de calculer cette expression.

Propriété (appelée propriété du quotient nul).

Soit $A(x)$ et $B(x)$ des expressions, où x désigne la variable.

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \text{ équivaut à dire que : } [A(x) \text{ ... et } B(x) \text{}].$$

En français, un quotient est nul si et seulement si son numérateur est et que son dénominateur n'est pas, ce qui assure l'existence du quotient.

Exercice 9

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$a) \frac{2x-5}{x+1} = 0 \quad ; \quad b) \frac{3x}{x-1} + 2 = 0 \quad ; \quad c) \frac{x^2-1}{x+1} = 0$$

✂-----

Exercice 10

Résoudre dans \mathbb{R} , de deux façons différents, l'équation suivante :

$$\frac{4x-3}{x+1} = \frac{3}{2}$$

✂-----

Moralité : toujours se ramener à ce que l'on sait faire !

Remarque : La technique des reste valable, mais il faut au préalable chercher les valeurs interdites pour les quotients, et exclure éventuellement toute solution de l'équation qui serait une valeur interdite.

Exercice 12

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x+2}{x+1}$

✂-----

Exercice 13

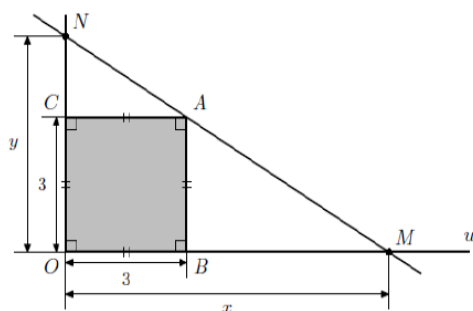
Est-il possible, en ajoutant le même nombre au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{5}{9}$, d'obtenir comme résultat la fraction $\frac{25}{26}$? Justifier.

✂-----

Exercice 14

Dans cet exercice, l'unité de longueur est le centimètre.

Sur la figure ci-dessous, $OBAC$ est un carré de côté 3, M un point mobile sur la demi-droite $[Bu)$ et distinct de B , et N le point d'intersection des droites (AM) et (OC) .



- On pose $OM = x$ et $ON = y$. Montrer que $y = \frac{3x}{x-3}$.
- Est-il possible que le triangle OMN soit isocèle ?
Si oui, préciser dans quel(s) cas.

✂-----

IV- Égalité de deux expressions algébriques

Nous allons voir, sur deux exemples différents, des méthodes permettant de prouver efficacement l'égalité entre deux expressions algébriques.

Exemple 1

Démontrer que $\frac{1}{6} - \frac{1}{2} = 4 \times \frac{2}{3} - 3$

Méthode 1Exemple 2

Démontrer que pour tout réel x , $x^2 + 8x + 5 = (x + 4)^2 - 11$.

Méthode 2**Exercice 15**

Démontrer, que pour tout réel x différent de -1 , on a : $\frac{2x+3}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}$

✂-----

Exercice 16

On pose : $f(x) = x^2 + x - 12$ pour tout nombre réel x .

1) Démontrer que $f(x) = (x-3)(x+4)$

2) Utiliser la forme la plus adaptée de $f(x)$ pour résoudre dans \mathbb{R} chacune des équations suivantes :

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = -12$

✂-----

Exercice 17

1) Etablir que pour tout réels a et b , on a l'identité suivante : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

2) En déduire une factorisation de $x^3 - 8$.