Addendum au cours : Quelques notions sur les inégalités et intervalle

0-Rappels : soient a et b deux nombres réels.

Ecrire $a < b$ signifie que ……………………………………………………………………*Exemple* : $2 < 3{,}5$

Ecrire que $a > b$ signifie que ………………………………………………………………*Exemple* : $4{,}1 > -1$

Ecrire que $a \leq b$ signifie que le nombre a est inférieur ou éventuellement égal à b. *Exemple* : $x \leq 2{,}5$ signifie que le réel x peut prendre n'importe quelle valeur inférieure ou égale à 2,5, ou encore que le réel x est au plus égal à 2,5.

Ecrire que $a \geq b$ signifie que……………………………………………………………….

Exemple : $y \geq -1$ signifie que…………………………………………………..

Enfin ***les nombres réels positifs*** sont ***les nombres strictement supérieurs à 0***, et ***les nombres réels négatifs*** sont ***les nombres strictement inférieurs à 0***.

Ecrire : $a > 0$ ou dire le réel a est un nombre positif a le même sens !

De même, $a < 0$ revient à dire que le réel a est un nombre négatif.

Les phrases : $a < b$ et $b > a$ ont exactement le même sens mathématique ! Il faut savoir jongler entre ces deux écritures ! De façon imagée : si vous avez moins d'argent que votre frère, c'est que votre frère a plus d'argent que vous !

Enfin, il arrive parfois que l'on écrive une double inégalité : $2 \leq x \leq 5$ qui est une écriture compacte de la ***double condition*** : $x \geq 2$ *et* $x \leq 5$.

I – Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1 : Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$.
L'ensemble de tous les nombres réels compris entre a *(inclus)* et b (inclus) est appelé l'intervalle fermé d'extrémités a et b. On le notera $[a\ ;\ b]$.

Ainsi, $[a\ ;\ b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leqslant x \leqslant b\}$. a et b sont aussi appelées les *bornes* de l'intervalle.

Représentation sur une droite graduée :

Exemple : $[2\ ;\ 3]$ désigne l'ensemble de tous les réels compris entre 2 et 3.

Ecrire : $x \in [2\ ;\ 3]$ équivaut à dire : $2 \leqslant x \leqslant 3$.
On notera donc : $x \in [2\ ;\ 3] \Leftrightarrow 2 \leqslant x \leqslant 3$.

Exercice 1

Dire si chacun des nombres suivants appartient à l'intervalle $[-3\ ;\ 5]$:

a) -1 ; ***b)*** 6 ; ***c)*** -3 ; ***d)*** 10^{-5}.

a et ***b*** désignent des réels tels que $a \leq b$. Il existe 9 types d'intervalles de $\mathbb{R}$:

L'ensemble des réels *x* tels que :	est l'intervalle noté :	représentation de l'intervalle

Remarques fondamentales

Tout d'abord les symboles $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des nombres réels. Dans les intervalles contenant l'un de ces symboles, les crochets seront toujours orientés vers l'extérieur de l'intervalle.

Comme on ne peut comparer entre eux que deux nombres réels, on s'interdira d'écrire par exemple : $\boxed{-\infty < 2}$ ou encore $\boxed{x < +\infty}$.

Sur le sens des crochets : Lorsqu'un crochet est dirigé vers l'intérieur de l'intervalle, la borne où figure ce crochet appartient à l'intervalle.
Lorsqu'un crochet est dirigé vers l'extérieur de l'intervalle, la borne où figure ce dernier n'appartient pas à cet intervalle.

Par exemple, pour l'intervalle [2 ; 3[, on a : ………………………….
Pour l'intervalle]-2,5 ; 0], on a : ……………………………………….

Enfin, on peut noter $\mathbb{R}$ = ……………………………….. : $\mathbb{R}$ est représenté par toute la droite graduée !

Exemples : 1) Traduire en termes d'appartenance à un intervalle :

a) $-2 \leqslant x \leqslant 1 \Leftrightarrow$ ……………… ; ***b)*** $x > 3 \Leftrightarrow$ ………………… ; ***c)*** $x \leqslant -4 \Leftrightarrow$ ………………….

2) Traduire l'appartenance d'un réel ***x*** à chacun des intervalles suivants par des inégalités :

a) $x \in]-3\ ;\ 8] \Leftrightarrow$ ……… ; ***b)*** $x \in]-\infty\ ;\ \pi[$ ……… ; ***c)*** $x \in]-10\ ;\ 3[$ …… …

Exercice 2

Ecrire, en utilisant des intervalles, l'ensemble des réels ***x*** tels que :

a) $x \neq 0$ ***b)*** $x \notin [1\ ;\ 3]$.

II - Inégalités

Règles fondamentales sur les inégalités

a) Inégalités et addition

On peut toujours ajouter (respectivement ***soustraire***) un ***même*** nombre ***aux deux membres*** d'une inégalité, en ***conservant son sens***.

Pour tous réels a, b et c, on a :

1) Si $a \leqslant b$, alors $a + \dots \leqslant b + \dots\dots$

2) Si $a \leqslant b$, alors $a - \dots \leqslant b - \dots\dots$

> ***Retenir qu'on ne change pas le sens d'une inégalité en y ajoutant (respectivement soustrayant) un même nombre dans chacun de ses deux membres.***

Remarque : Les règles énoncées restent vraies si on met n'importe lequel des symboles : $<$, $>$ ou $\geq$. De même dans les propriétés qui suivent.

b) Inégalités, produits et quotients

1) On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un ***même nombre strictement positif***, en ***conservant le sens de l'inégalité.***

C'est-à-dire que pour tout réel a, b et c :

Si $a \leqslant b$ *et si* $c > 0$, *alors*............................. *et* ....

Pourquoi ?

2) On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un ***même nombre strictement négatif,*** en **changeant le sens de l'inégalité.**

C'est-à-dire que pour tout réel a, b et c :

Si $a \leqslant b$ *et si* $c < 0$, *alors*............................. *et* ....

Même type de justification qu'au point précédent.

> ***Retenir qu'on ne change pas le sens d'une inégalité en multipliant (respectivement divisant) par un même nombre POSITIF chacun de ses deux membres.***
>
> ***A contrario, on change le sens d'une inégalité en multipliant (respectivement divisant) par un même nombre NEGATIF chacun de ses deux membres.***
>
> **Pour tout nombre $c > 0$: $a < b$ est équivalente à : $a \times c < b \times c$.**
>
> **Pour tout nombre $c < 0$: $a < b$ est équivalente à : $a \times c > b \times c$.**

III- Inéquations

Définition

Une inéquation est une inégalité dans laquelle est présente une inconnue, souvent nommée x en mathématiques.

Résoudre une inéquation, c'est déterminer, si elles existent, toutes les valeurs de x pour lesquelles l'inégalité écrite est vraie.

Exemple : Soit l'inéquation : $2x + 6 \leqslant 0$.

Résoudre cette inéquation, c'est déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles l'inégalité $2x + 6 \leqslant 0$ est vraie : on cherche donc toutes les valeurs de x telles que $2x + 6$ soit négatif ou nul !
Ces valeurs de x sont appelées les solutions de l'inéquation.

Remarque cruciale

Deux inéquations sont dites équivalentes lorsqu'elles ont le même ensemble de solution.

Par exemple, les inéquations $x - 1 \geqslant 0$ et $x \geqslant 1$ sont équivalentes.

Une ***inéquation*** est dite ***résolue*** *lorsqu'on a* ***isolé l'inconnue x.***

Les règles du paragraphe précédent sur les inégalités vont nous donner un moyen efficace et sûr pour résoudre des inéquations :

Application à la résolution d'inéquations : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $2x - 1 \geqslant 3$ ***b)*** $-4x < -x + 6$ ***c)*** $2x - 6 > 3 - (4 - 2x)$ ***d)*** $x < 2x - (x - 6)$ ***e)*** $x^2 + 1 > (x + 2)^2$