Maths expertes Groupe 1 ***Contrôle numéro 7*** ***Mardi 16 Avril 2024***

***Exercice I* (*environ 3 points*)**

Soit $z_1 = -1 + i$, $z_2 = -2e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

1) Déterminer la forme exponentielle de z_1 et celle de z_2.
2) En déduire l'argument principal de z_3, où $z_3 = \frac{z_1^3}{z_2}$.

***Exercice II* (*environ 2 points*)**

Montrer que pour tout réel $\theta \in]-\pi;\pi[$, le nombre complexe suivant est imaginaire pur : $\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$.

***Exercice III* (*environ 2 points*)**

Montrer que pour tout réel x appartenant à $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $\frac{\sin(3x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(3x)}{\cos(x)} = 2$.

***Exercice IV* (*environ 5 points*)**

a) Rappeler les formules d'Euler.

b) Développer et réduire : $(a+b)^4$, où a et b sont des nombres complexes.

c) En déduire que pour tout réel x : $cos^4(x) = \frac{\cos(4x)+4\cos(2x)+3}{8}$.

d) Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = cos^4(x)$.

***Exercice V* (*environ 1,5 points*)**

a) Calculer : $(2i)^5$.

b) Factoriser en un produit de deux polynômes dont l'un est de degré 1 : $P(z) = z^5 - 32i$.

***Exercice VI* (*environ 3 points*)**

Pour tout réel θ, on définit la fonction polynôme P par :

$P(z) = z^3 + (2\sin(\theta) - 1)z^2 + (1 - 2\sin(\theta))z - 1$.

a) Vérifier que 1 est une racine de P.
b) Factoriser alors P en un produit de trois polynômes de degré 1.

***Exercice VII* (*environ 3 points*)**

Soit z un nombre complexe non nul, différent de 1 et différent de i.

Dans le plan complexe, on considère les points A, M et N d'affixes respectives : $z_A = i, z_M = z$ et $z_N = iz$.

a) Donner une interprétation géométrique de : $arg\left(\frac{iz-i}{z-i}\right)$.
b) Déterminer tous les nombres complexes z pour lesquels le triangle AMN est rectangle en A, et représenter cet ensemble dans un repère orthonormé direct.

***Exercice VIII* (*environ 1,5 points*)**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Déterminer, pour tout entier naturel p, la valeur de la somme suivante : $S = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2kp\pi}{n}}$.

Bonus : A ne chercher que si tout le reste est fini.

L'ensemble formé par toutes les racines de l'unité est-il égal ou distinct de $\mathbb{U}$? Justifier.

+ ? mq si a,b,c sont dans u et de somme 1, alors leurs inverses sont aussi de somme 1.