Maths expertes Groupe 1 ***Contrôle numéro 5*** **(2 *heures*)** ***Mardi 9 Janvier 2024***

Exercice I **(*environ* 9 *points*)**

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 2$; $z_B = 1 + \sqrt{3}i$ et $z_C = 1 - \sqrt{3}i$.

1*a*) Donner la forme trigonométrique de z_B et z_C.

1*b*) Construire rigoureusement les points A, B et C dans le repère précédent.

On se propose de déterminer l'ensemble noté $\mathcal{D}$ formé par tous les points M d'affixe z tels que : $|z| = |z - 2|$.

2*a*) Vérifier que les points B et C appartiennent à $\mathcal{D}$. A appartient-il à $\mathcal{D}$?

2*b*) Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{D}$ en justifiant.

3) A tout point M d'affixe z, avec z≠2, on associe le point M'd'affixe z', où z' $= \frac{-4}{z-2}$.

a) Déterminer l'écriture algébrique des affixes des points B' et C'respectivement associés aux point B et C.

b) Démontrer que pour tout nombre complexe z≠2, on a : $|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$.

c) Soit M un point d'affixe z appartenant à l'ensemble $\mathcal{D}$. Démontrer que le point M'(associé à M) appartient à un cercle noté Γ dont on précisera le centre et le rayon. Construire Γ.

d) Justifier que B et C appartiennent à Γ.

Exercice II **(*environ* 10 *points*)**

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$). On prendra comme unité 2 *cm* sur chaque axe.

On considère la fonction *f*, qui à tout nombre complexe z, associe : $f(z) = z^2 + 2z + 9$.

1) Calculer, sous forme algébrique, l'image de $-1+\sqrt{3}\times i$ par *f*.

2*a*) Résoudre dans ℂ l'équation : $f(z) = 5$.

2*b*) Construire sur le graphique, les points A et B dont les affixes sont solutions de l'équation $f(z) = 5$, le point A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive.

3) Soit (F) l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie : $|f(z)-8| = 3$.

Démontrer que (F) est un cercle de centre Ω(-1 ; 0) dont on précisera le rayon.

4) Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + yi$, où x et y sont des nombres réels.

a) Montrer que l'écriture algébrique de $f(z)$ est : $f(z) = x^2 - y^2 + 2x + 9 + (2xy + 2y)i$.

b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.

Démontrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations réduites.

Compléter votre graphique en construisant ces droites.

Partie B

Soit M un point d'affixe z non nulle, et M′le point d'affixe $z' = \frac{4}{\bar{z}}$.

1) Montrer que O, M et M′sont alignés.

2) Déterminer, en justifiant, l'ensemble des nombres complexes z non nuls, pour lesquels les points M et M′sont confondus.

Exercice III **(2 *points*)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives 2 et -2.

On définit l'application f qui à tout point M d'affixe z différente de 2, associe le point M' d'affixe z' avec : $z' = f(z) = \frac{\bar{z}(z-2)}{\bar{z}-2}$.

a) Soit P le point d'affixe $z_P = 1+i$. Déterminer l'écriture algébrique de l'affixe du point P' image de P par f.

b) Démontrer que les droites (AP) et (BP') sont parallèles.