Exercice I (*environ* 2 *points*)

a) Expliquer sommairement pourquoi $5^2 \equiv -1[13]$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $5^{4n} - 1$ est divisible par 13.

Exercice II (*environ* 4 *points*)

1) Soit n un entier relatif.

Compléter le tableau suivant de congruences modulo 8 à l'aide de chiffres (les plus petits possibles) :

$n \equiv$ ... [8]	0	1	2	3	4	5	6	7
$n^2 \equiv$ ... [8]								

2) A l'aide de la question 1), compléter alors, pour tous entiers n et m, le tableau ci-dessous de congruences modulo 8, de l'entier $n^2 + m^2$:

$n^2 \ldots \equiv$ [8] / $m^2 \ldots \equiv$ [8]	.....	.....	.....
.....			
.....			
.....			

3) 2023 peut-il s'écrire comme la somme de deux carrés d'entiers ? Justifier.

Exercice III (4 *points*)

Soit a et b des entiers relatifs.

On se propose de prouver que : (7 divise a^2+b^2) équivaut à (7 divise a et 7 divise b).

i) Supposons que 7 divise a et 7 divise b.
Comment cela se traduit-il à l'aide d'une congruence ?
A l'aide de cette congruence, montrer que 7 divise a^2+b^2.

ii) Réciproquement, supposons que 7 divise $a^2 + b^2$.
Etablir que pour tous entiers relatifs a et b, a^2 et b^2 sont congrus à 0,1,2 ou 4 modulo 7.
En déduire un tableau de congruences de l'entier $a^2 + b^2$ modulo 7. Conclure.

iii) Conclure !