Exercice I (12 points)

Parmi les ordinateurs d'un parc informatique, 60 % présentent des failles de sécurité. Afin de pallier ce problème, on demande à un technicien d'intervenir chaque jour pour traiter les défaillances.

On estime que chaque jour, il remet en état 7 % des ordinateurs défaillants, tandis que de nouvelles failles apparaissent chez 3 % des ordinateurs sains. On suppose de plus que le nombre d'ordinateurs est constant sur la période étudiée.

Pour tout entier naturel n, on note a_n la proportion d'ordinateurs sains de ce parc informatique au bout de n jours d'intervention, et b_n la proportion d'ordinateurs défaillants au bout de n jours.
Ainsi $a_0 = 0,4$ et $b_0 = 0,6$.

Partie A

1. Décrire la situation précédente à l'aide d'un graphe ou d'un arbre pondéré.
2. Déterminer a_1 et b_1.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,07 \\ 0,03 & 0,93 \end{pmatrix}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
   a. Justifier que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.
   b. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.
   c. Calculer, à l'aide de la calculatrice, X_{30}. En donner une interprétation concrète (les coefficients seront arrondis au millième).

Partie B

1. On pose $D = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,03 \end{pmatrix}$.
   a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} + b_{n+1} = 1$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n,
   $$X_{n+1} = DX_n + B.$$
2. On pose, pour tout entier naturel n, $Y_n = X_n - 10B$.
   a. Montrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+1} = DY_n$.
   b. On admet que pour tout entier naturel n, $Y_n = D^n Y_0$.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = D^n (X_0 - 10B) + 10B$.
   c. Donner l'expression de D^n puis en déduire a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de n.
3. Selon cette étude, que peut-on dire de la proportion d'ordinateurs défaillants sur le long terme ?

Exercice II **(8 points)**

En montagne, un randonneur a effectué des réservations dans deux types d'hébergements :
L'hébergement A et l'hébergement B.
Une nuit en hébergement A coûte 24 € et une nuit en hébergement B coûte 45 €.
Il se rappelle que le coût total de sa réservation est de 438€.
On souhaite retrouver les nombres x et y de nuitées passées respectivement en hébergement A et en hébergement B

1. **a.** Montrer que les nombres x et y sont respectivement inférieurs ou égaux à 18 et 9.

   b. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant afin qu'il affiche les couples $(x\,;\,y)$ possibles.

```
Entrée :        x et y sont des nombres
Traitement :    Pour x variant de 0 ...      (1)
                    Pour y variant de 0 ...  (2)
                        Si ...          (3)
                            Afficher x et y
                        Fin Si
                    Fin Pour
                Fin Pour
Fin traitement
```

2. Justifier que le coût total de la réservation est un multiple de 3.

3. **a.** Justifier que l'équation $8x + 15y = 1$ admet pour solution au moins un couple d'entiers relatifs.

   b. Déterminer une telle solution.

   c. Résoudre l'équation (E) : $8x+15y = 146$ où x et y sont des nombres entiers relatifs.

4. Le randonneur se souvient avoir passé au maximum 13 nuits en hébergement A.
   Montrer alors qu'il peut retrouver le nombre exact de nuits passées en hébergement A et celui des nuits passées en hébergement B.
   Calculer ces nombres.*