***Consignes à lire attentivement :***

***Ce travail qui porte sur le chapitre 5 est à rendre pour le 26 Mars.***

***Vous pouvez, au choix, rendre seul votre copie, ou rendre un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 2 ou 3 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.***

***Les DM ont un rôle crucial : ils permettent de vous faire assimiler le cours, de pratiquer des mathématiques, de rédiger, d'acquérir de l'aisance, et d'apprendre à travailler sérieusement.***

***Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt automatique de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.***

***Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction.***

***Les copies ou exercices rendus en retard, ou ne respectant pas ces consignes, ne seront pas corrigés.***

## Exercice I

Traiter les exercices suivants de votre livre :

18 page 79 ; 34 page 80 ; 42$b$) page 80 ; 50 page 81 ; 81 page 81 ; 100 page 88

69 page 82+primitiver la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(2x)\sin^2(x)$.

## Exercice II

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $]-\pi;\pi]$ l'équation : $\cos(2x) = \sin(x)$.

## Exercice III *(dernier exercice du cours Page 12)*

On considère les nombres complexes $z_n$ définis, pour tout entier naturel $n$, par

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n.$$

On note $A_n$ le point d'affixe $z_n$ dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ de l'annexe 2.
L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points $A_n$.

1. **a.** Vérifier que $1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

   **b.** En déduire $z_1$ et $z_2$ sous forme exponentielle.

2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel $n$,

$$z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}.$$

   **b.** Pour quelles valeurs de $n$, les points O, $A_0$ et $A_n$ sont-ils alignés ?

3. Pour tout entier naturel $n$, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.

   **a.** Interpréter géométriquement $d_n$.

   **b.** Calculer $d_0$.

   **c.** Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n).$$

   **d.** En déduire que la suite $(d_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique puis que pour tout entier naturel $n$,

$$d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n.$$

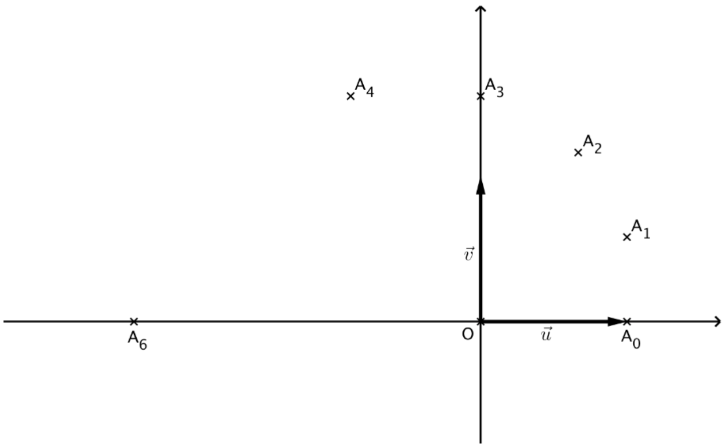
4. **a.** Montrer que pour tout entier naturel $n$,

$$|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2.$$

   **b.** En déduire que, pour tout entier naturel $n$, le triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$ est rectangle en $A_n$.

**c.** Construire, à la règle non graduée et au compas, le point $A_5$ sur la figure de l'annexe 2 à rendre avec la copie.

**d.** Justifier cette construction.*




***Les exercices suivants sont tous issus de post bac. Ils sont facultatifs et à traiter selon vos envies.***

***Exercice A***

*Soit a un réel fixé.*

Résoudre le système suivant, d'inconnues réelles $x$ et $y$ :

$$\begin{cases} \cos a + \cos(a+x) + \cos(a+y) = 0 \\ \sin a + \sin(a+x) + \sin(a+y) = 0 \end{cases}.$$

***Exercice B***

Rappel sur la somme des termes d'une suite géométrique.

Soit q un nombre complexe :

– si $q \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

– si $q = 1$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = n+1$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes :

1. $C = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$

2. $C = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^k(\theta)\cos(k\theta)$ et $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^k(\theta)\sin(k\theta)$

**<u>Indication</u> : S'intéresser à chaque fois au calcul de C+*i*S !**

3.

Soit la suite $u$ définie par : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k) = \cos(0) + \cos(1) + \cos(2) + \cdots + \cos(n)$.

Montrer que cette suite est bornée. On rappelle qu'il s'agit de trouver une constante $C$ (indépendante de $n$) telle que $|u_n| \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

***Exercice C***

Pour $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, calculer module et argument de $A = e^{i\theta} + e^{i\theta'}$ et $B = \dfrac{e^{i\theta} + e^{i\theta'}}{1 + e^{i(\theta+\theta')}}$

***Exercice D***

Soit ABCD un carré dans le plan muni d'un repère orthonormé direct. On suppose que C et D sont des points à coordonnées entières. Montrer que A et B sont aussi des points à coordonnées entières.

***Exercice E***

Soit un complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, +1\}$ et les points $A(+1)$, $A'(-1)$, $M(z)$, $M'(\frac{1}{z})$ et $P(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}))$. Montrer que la droite $(MM')$ est bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PA'})$.