***Ce travail est à rendre pour le Mardi 28 Mars. Vous pouvez vous grouper en binômes.***

## *Exercice I*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

1. On appelle $I$ la matrice identité d'ordre 2.
   Vérifier que $A^2 = A + 2I$.
2. En déduire une expression de $A^3$ et une expression de $A^4$ sous la forme $\alpha A + \beta I$ où $\alpha$ et $\beta$ sont des réels.
3. On considère les suites $(r_n)$ et $(s_n)$ définies par $r_0 = 0$ et $s_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n$,

$$\begin{cases} r_{n+1} = r_n + s_n \\ s_{n+1} = 2r_n \end{cases}$$

   Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $A^n = r_n A + s_n I$.
4. Démontrer que la suite $(k_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $k_n = r_n - s_n$ est géométrique de raison $-1$.
   En déduire, pour tout entier naturel $n$, une expression explicite de $k_n$ en fonction de $n$.
5. On admet que la suite $(t_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $t_n = r_n + \dfrac{(-1)^n}{3}$ est géométrique de raison 2.
   En déduire, pour tout entier naturel $n$, une expression explicite de $t_n$ en fonction de $n$.
6. Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel $n$, une expression explicite de $r_n$ et $s_n$ en fonction de $n$.
7. En déduire alors, pour tout entier naturel $n$, une expression des coefficients de la matrice $A^n$.

## *Exercice II*

### Partie A : préliminaires

1. **a.** Soient $n$ et $N$ deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que :

$$n^2 \equiv N-1 \quad \text{modulo } N.$$

Montrer que : $n \times n^3 \equiv 1 \quad \text{modulo } N$.

**b.** Déduire de la question précédente un entier $k_1$ tel que : $5k_1 \equiv 1 \quad \text{modulo} 26$.
On admettra que l'unique entier $k$ tel que : $0 \leqslant k \leqslant 25$ et $5k \equiv 1 \quad \text{modulo} 26$ vaut 21.

2. On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

**a.** Calculer la matrice $6A - A^2$.

**b.** En déduire que $A$ est inversible et que sa matrice inverse, notée $A^{-1}$, peut s'écrire sous la forme $A^{-1} = \alpha I + \beta A$, ou $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels que l'on déterminera.

**c.** Vérifier que : $B = 5A^{-1}$.

**d.** Démontrer que si $AX = Y$, alors $5X = BY$.

### Partie B : procédure de codage

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

- Le mot à coder est remplacé par la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, où $x_1$ est l'entier représentant la première lettre du mot et $x_2$ l'entier représentant la deuxième, selon le tableau de correspondance ci-dessous :

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

- La matrice $X$ est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.
- La matrice $Y$ est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où $r_1$ est le reste de la division euclidienne de $y_1$ par 26 et $r_2$ le reste de la division euclidienne de $y_2$ par 26.
- Les entiers $r_1$ et $r_2$ donnent les lettres du mot codé, selon le tableau de correspondance ci-dessus.

**Exemple :** « OU »(mot à coder) $\rightarrow X \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 76 \\ 82 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow$ « YE » (mot codé).

**Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)**

Lors du codage, la matrice $X$ a été transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.

1. Démontrer que : $\begin{cases} 5x_1 & = & 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 & = & -3y_1 + 4y_2 \end{cases}$.
2. En utilisant la question 1. b. de la **partie A**, établir que :

$$\begin{cases} x_1 & \equiv & 16y_1 + 5y_2 \\ x_2 & \equiv & 15y_1 + 6y_2 \end{cases} \quad \text{modulo } 26$$

3. Décoder le mot « QP ».

## *Exercice III*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation

$$7x - 3y - 1 = 0$$

On définie la suite $(A_n)$ de points du plan de coordonnées $(x_n \ : \ y_n)$ vérifiant pour tout $n$ entier naturel :

$$\begin{cases} x_0 &= 1 \\ y_0 &= 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{n+1} &= -\frac{13}{2}x_n + 3y_n \\ y_{n+1} &= -\frac{35}{2}x_n + 8y_n \end{cases}$$

1. On note $M$ la matrice $\begin{pmatrix} \frac{-13}{2} & 3 \\ \frac{-35}{2} & 8 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel $n$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
   a. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $X_{n+1} = MX_n$.
   b. Sans justifier, exprimer pour tout entier naturel $n$, $X_n$ en fonction de $M^n$ et $X_0$.
2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$ et on admet que la matrice inverse de $P$, notée $P^{-1}$, est définie par $P^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.
   a. Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale $D$ que l'on précisera.
   b. Pour tout entier naturel $n$, donner $D^n$ sans justification.
   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $M^n = PD^nP^{-1}$.
3. On admet que, pour tout entier naturel $n$, $M^n = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} & 6 - \frac{6}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} & 15 - \frac{14}{2^n} \end{pmatrix}$.
   En déduire que, pour tout entier naturel $n$, une expression de $x_n$ et $y_n$ en fonction de $n$.
4. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, le point $A_n$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.*