Consignes à lire attentivement :

Ce travail qui porte sur le chapitre 4 est à rendre pour le 12 Mars.

Vous pouvez, au choix, rendre seul votre copie, ou rendre un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 2 ou 3 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Les DM ont un rôle crucial : ils permettent de vous faire assimiler le cours, de pratiquer des mathématiques, de rédiger, d'acquérir de l'aisance, et d'apprendre à travailler sérieusement.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt automatique de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction.

Les copies ou exercices rendus en retard, ou ne respectant pas ces consignes, ne seront pas corrigés.

Exercice I

Faire les exercices ou questions d'exercices suivants de votre livre : 48 p. 238, 55*a*) p.239, 79 p.243

Exercice II

104 p. 249

Exercice III

102 p.249

Exercice IV ***(Hey bro, kiffes-tu la trigo ?)***

Soit θ un nombre réel et $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

1) Calculer $(A(\theta))^n$ pour n valant successivement 0,1 et 2. On exprimera chacun des coefficients de la matrice sans puissance pour chacun de ses coefficients.

2) Conjecturer l'expression de $(A(\theta))^n$, puis démontrer que cette dernière est bien vraie pour tout entier naturel n.

3)

a) Montrer que pour tous réels θ et θ′, $A(\theta) \times A(\theta') = A(\theta + \theta')$.

b) En déduire que pour tout réel θ, A est inversible, et retrouver ce résultat d'une autre manière.

c) En déduire cos(3θ) et sin(3θ), exprimés uniquement avec des cosinus pour cos(3θ) et uniquement avec ses sinus pour la seconde.

Exercice V

Une ville possède un réseau de vélos en libre service dont deux stations A et B se situent en haut d'une colline. On admet qu'aucun vélo des autres stations n'arrive en direction des stations A et B.

On constate pour chaque heure n qu'en moyenne :
- 20 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station A sont toujours à cette station.
60 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station A sont à la station B et les autres sont dans d'autres stations du réseau ou en circulation.
- 10 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station B sont à la station A, 30 % sont toujours à la station B et les autres sont dans d'autres stations du réseau ou en circulation.
- Au début de la journée, la station A comporte 50 vélos, la station B 60 vélos.

Partie A

Au bout de n heures, on note a_n le nombre moyen de vélos présents à la station A et b_n le nombre moyen de vélos présents à la station B. On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et donc $U_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice M telle que $U_{n+1} = M \times U_n$.
2. Déterminer U_1 et U_2.
3. Au bout de combien d'heures reste-t-il un seul vélo dans la station A ?

Partie B

Le service décide d'étudier les effets d'un approvisionnement des stations A et B consistant à apporter après chaque heure de fonctionnement 30 vélos à la station A et 10 vélos à la station B.
Afin de conduire cette étude, il décide de modéliser la situation présente de la manière suivante :

Au bout de n heures, on note α_n le nombre moyen de vélos présents à la station A et β_n le nombre moyen de vélos présents à la station B. On note V_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions $V_{n+1} = M \times V_n + R$ avec $R = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$.

1. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N la matrice $I - M$.
   a. On désigne par V une matrice colonne à deux lignes.
   Montrer que $V = M \times V + R$ équivaut à $N \times V = R$.
   b. On admet que N est une matrice inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,2 \\ 1,2 & 1,6 \end{pmatrix}$.
   En déduire que $V = \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}$
2. Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = V_n - V$.
   a. Montrer que $W_{n+1} = M \times W_n$.
   b. On admet que : – pour tout entier naturel n, $W_n = M^n \times W_0$,
   – pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $M^n = \dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$.
   Calculer, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, V_n en fonction de n.
   c. Le nombre moyen de vélos présents dans les stations A et B a-t-il tendance à se stabiliser ?