Ce travail est à rendre pour le Mardi 28 Février. Vous pouvez vous grouper en binômes.

Exercice 0

Déterminer, dans $\mathbb{N}$, le nombre de diviseurs du nombre $10\,!$.

Exercice I

Dans cet exercice, on s'intéresse aux triplets d'entiers naturels non nuls $(x,\ y,\ z)$ tels que

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Ces triplets seront nommés « triplets pythagoriciens » en référence aux triangles rectangles dont ils mesurent les côtés, et notés en abrégé « TP ».
Ainsi $(3, 4, 5)$ est un TP car $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$.

Partie A : généralités

1. Démontrer que, si $(x,\ y,\ z)$ est un TP, et p un entier naturel non nul, alors le triplet $(px,\ py,\ pz)$ est lui aussi un TP.
2. Démontrer que, si $(x,\ y,\ z)$ est un TP, alors les entiers naturels x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.
3. Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un entier impair :
   $n = 2^\alpha \times k$ où α est un entier naturel (éventuellement nul) et k un entier naturel impair.
   L'écriture $n = 2^\alpha \times k$ est nommée *décomposition* de n.
   Voici par exemple les *décompositions* des entiers 9 et 120 : $9 = 2^0 \times 9$,
   $120 = 2^3 \times 15$.
   a) Donner la décomposition de l'entier 192.
   b) Soient x et z deux entiers naturels non nuls, dont les décompositions sont $x = 2^\alpha \times k$ et $z = 2^\beta \times m$.
      Écrire la *décomposition* des entiers naturels $2x^2$ et z^2.
   c) En examinant l'exposant de 2 dans la *décomposition* de $2x^2$ et dans celle de z^2 , montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls $(x,\ z)$ tels que $2x^2 = z^2$.

   On admet que la question **A - 3.** permet d'établir que les trois entiers naturels x, y et z sont deux à deux distincts. Comme de plus les entiers naturels x, y jouent un rôle symétrique, dans la suite, pour tout TP $(x,\ y,\ z)$, les trois entiers naturels x, y et z seront rangés dans l'ordre suivant :

$$x < y < z.$$

Partie B : recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

1. Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 2015 puis, en utilisant le TP donné dans le préambule, déterminer un TP de la forme $(x, y, 2015)$.
2. On admet que, pour tout entier naturel n, $(2n+1)^2+(2n^2+2n)^2=(2n^2+2n+1)^2$.
   Déterminer un TP de la forme $(2015, y, z)$.
3. a) En remarquant que $403^2 = 169 \times 961$, déterminer un couple d'entiers naturels non nuls (x, z) tels que : $z^2 - x^2 = 403^2$, avec $x < 403$.
   b) En déduire un TP de la forme $(x, 2015, z)$.

__Exercice III__

On considère la parabole P d'équation $y = x^2$ dans un repère du plan.
Soit m et n deux entiers naturels strictement supérieurs à 1.
On note $M(m)$ le point de P d'abscisse m et $N(n)$ le point de P d'abscisse $-n$.

1) Conjecture

Après avoir tracé P, recopier le tableau et le compléter par lecture graphique :

m	2	2	2	3	3	3	4	4	4
n	2	3	4	2	3	4	2	3	4
Ordonnée à l'origine de (MN)									

Quelle conjecture peut-on faire sur l'ordonnée à l'origine de la droite (MN) ?

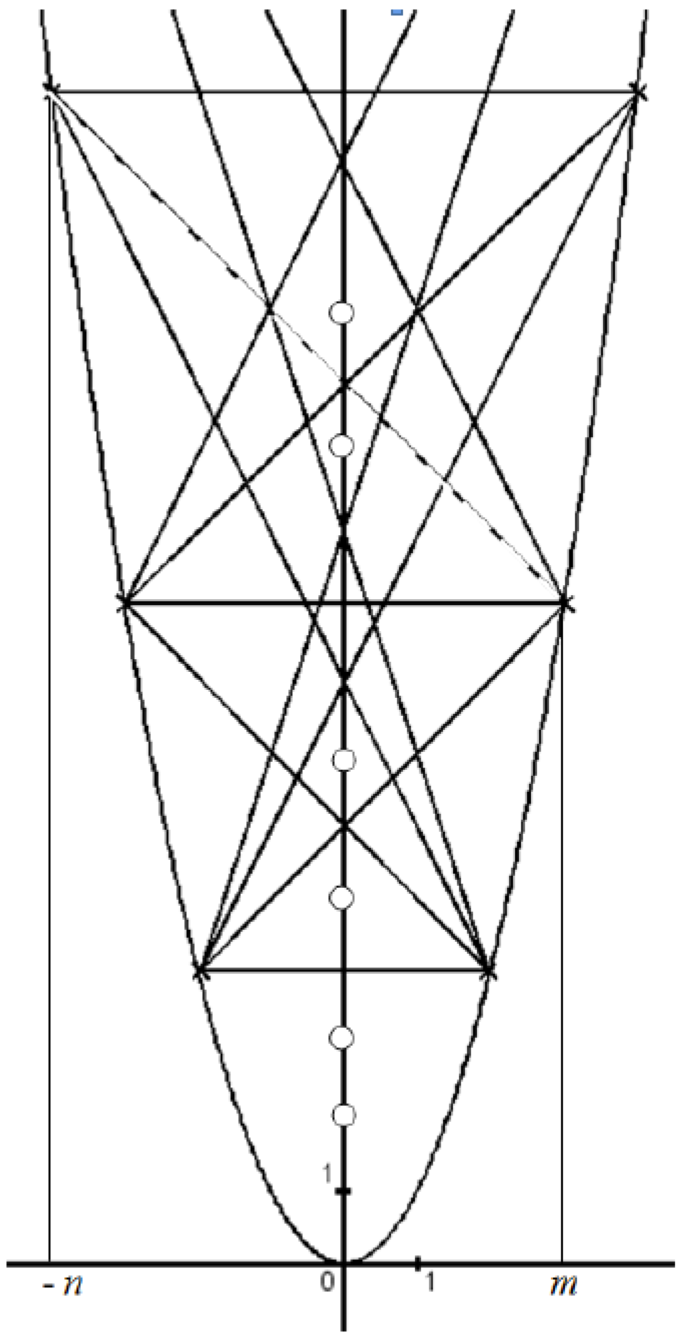
2) Démonstration

Déterminer en fonction de m et n une équation de la droite (MN).
Quelle est son ordonnée à l'origine ?

3) Application

Sur la figure ci-contre, on a tracé les segments $[MN]$ pour les premières valeurs de m et n.

Quelles particularités ont les ordonnées entières y $(y > 1)$ des points de l'axe des ordonnées non traversées par l'un des segments ?



<u>Exercice</u> <u>4</u> (***facultatif, pour les élèves curieux***)

Le petit théorème de Fermat : faire les parties **1, 2** ***et*** **3** ***page*** **72–73** ***du livre***