Consignes à lire attentivement :

Ce travail qui porte sur le chapitre 4 est à rendre pour le 5 Février (vous pouvez le rendre avant).

Vous pouvez, au choix, rendre seul votre copie, ou rendre un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 2 ou 3 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Les DM ont un rôle crucial : ils permettent de vous faire assimiler le cours, de pratiquer des mathématiques, de rédiger, d'acquérir de l'aisance, et d'apprendre à travailler sérieusement.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt automatique de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction.

Les copies ou exercices rendus en retard, ou ne respectant pas ces consignes, ne seront pas corrigés.

Exercice I

Faire les micros-exercices ou questions d'exercices suivants de votre livre :

26 p.237 ; 34 *c)* p.237 ; 43 p.238 ; 52 p. 239.

Exercice II

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n, où n est un entier non nul.

a) Démontrer que si A et B commutent, alors : $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

b) Quid de cette relation si A et B ne commutent pas ?

c) Calculer : $(A + I_3)^2$ puis $(I_3 - 2A)^2$ sachant que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice III

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier $(A - I)(A + 2I) = 0$. En déduire que A est inversible : préciser A^{-1}.
   De même, justifier que $A - I$ et $A + 2I$ ne sont pas inversibles.
2. Prouver l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n I + b_n A$.
3. On pose $c_n = a_n + b_n$: montrer que la suite (c_n) est constante. En déduire les expressions de a_n et b_n comme fonction de n.

Exercice IV

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On note $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid MA = AM\}$, l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A : montrer que $C(A)$ stable par addition.

Est-il stable pour la multiplication matricielle ?

Montrer que si $M \in C(A)$ est une matrice inversible, alors $M^{-1} \in C(A)$.

Exercice V

Soient A, B et C trois matrices non nulles de $M_3(\mathbb{R})$, telles que : $A \times B \times C = O_3$.

Montrer qu'au moins deux de ces matrices ne sont pas inversibles.

Exercice VI

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $B = A^2$. Vérifier $B^2 = B$.
2. A est-elle inversible ?

Exercice VII **(*les trois questions sont indépendantes les unes des autres*)**

1.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jusfifier que est inversible, puis calculer M^{-1}.

2.

Dans chacun des deux cas suivants, trouver tous les réels a pour lesquels la matrice M est inversible.

$$M = \begin{pmatrix} a & -a \\ a+1 & a-1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} a+1 & a^2-1 \\ -1 & -a-1 \end{pmatrix}$$

3.

On pose $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}$.

1. Montrer que $\mathbb{H}$ est stable par addition et multiplication.
2. Résoudre dans $\mathbb{H}$ l'équation : $M^2 = -I_2$.

Exercice facultatif **(*mais simple*)**

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & & \vdots \\ 0 & \iddots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$: calculer M^2 puis M^n. M est-elle inversible ?