Consignes à lire attentivement :

Ce travail qui porte sur le chapitre 3 est à rendre pour le 16 Janvier.

Vous pouvez, au choix, rendre seul votre copie, ou rendre un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 2 ou 3 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Les DM ont un rôle crucial : ils permettent de vous faire assimiler le cours, de pratiquer des mathématiques, de rédiger, d'acquérir de l'aisance, et d'apprendre à travailler sérieusement.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt automatique de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction.

Les copies ou exercices rendus en retard, ou ne respectant pas ces consignes, ne seront pas corrigés.

Exercice I

Faire les micros-exercices ou questions d'exercices suivants de votre livre :

29 page 53 ; 45 *a*) ; 46 *b*) ; 47 page 54 ; 52 page 55 ; 55 page 55 ; 60 page 55 ; 63 *c*) ; 64 page 55.

66 page 56 ; 75 *b*) ; 76 page 56 ; 77 *a*) ; 79 page 56.

Exercice I

Faire au choix au moins un des exercices suivants : 100 page 61 ; 101 page 61.

Exercice II

109 page 63

Exercice III (très intéressant)

112 page 63

Exercice IV ***(facultatif)***

Voici en guise de cadeau de Noël mathématiques quelques exercices pèle mêle, que je pose post bac :

Faite en un de temps en temps, et savourez quand vous avancez et trouvez une solution. En mathématiques ne pas trouver du premier coup même après avoir cherché est tout à fait normal.

Pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$, donner la forme trigonométrique de $z = (1 + i\tan\theta)^2$.

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}, \left|\dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right| \leq \dfrac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|}$.

Montrer que pour tous nombres complexes z et z' :

$$|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leq \sqrt{2}|z| \ .$$

$$|1+z| + |z+z'| + |z'| \geq 1.$$

$$z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \left|\frac{z+i}{z-i}\right| = 1 \text{ (preuve géométrique, sans calcul !).}$$

---

1. Soit $z \in \mathbb{C}$: prouver l'équivalence $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2z\bar{z} = z + \bar{z}$.
2. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M du plan, d'affixe z tels que le complexe $\left(\frac{z}{z-1}\right)^2$ est un réel.
   (a) Compléter la caractérisation : (Z réel) $\Leftrightarrow$ ($Z - \bar{Z} = \ldots$).
   (b) Déterminer et tracer $\mathcal{E}$ (on obtient, à quelque chose près, la réunion de deux objets simples)

---

1. Soit ω, un nombre complexe non nul et u un nombre réel. décrire géométriquement les ensembles suivants (méthode conseillée : écrire $z = x + iy$, $\omega = a + ib$....) :
   (a) $D = \{M(z) \mid \bar{\omega}z + \omega\bar{z} + u = 0\}$.
   (b) $C = \{M(z) \mid z\bar{z} + \omega\bar{z} + \bar{\omega}z + u = 0\}$.
2. On note $\mathcal{P}$ le plan complexe, et l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P} \setminus \{O\} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ M(z) & \longmapsto & M'(z' = \frac{1}{z}) \end{array} \right.$.
   (a) vérifier que f établit une bijection de $\mathcal{P} \setminus \{O\}$ vers $\mathcal{P} \setminus \{O\}$.
   (b) Déterminer l'image par f d'une droite ne passant pas par l'origine O.
   (c) Déterminer l'image par f de $\mathcal{D} \setminus \{O\}$, où $\mathcal{D}$ est une droite passant par O.
   (d) Déterminer l'image par f d'un cercle $\mathcal{C}$ ne passant pas par l'origine O.

Soit z, un complexe qui ne soit pas un réel négatif (i.e $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$).

En développant $(z + |z|)^2$, montrer que $z = \left(\dfrac{z + |z|}{\sqrt{2\mathrm{Re}(z) + 2|z|}}\right)^2$.

Application : donner rapidement les racines deuxièmes de $5 + 12i$.

Rappel : on appelle racine carrée d'un nombre complexe z tout nombre complexe w tel que $w^2 = z$.

+

<u>Une formule intéressante ?</u> Si a et b sont des réels, on pose $c = \sqrt{a^2+b^2}$ puis on définit le nombre complexe $\delta = \sqrt{\dfrac{c+a}{2}} + i\sqrt{\dfrac{c-a}{2}}$.

1. Justifier l'existence de ce nombre δ.
2. Si quelqu'un vous affirme que δ est une racine carrée du nombre complexe $a+ib$, que répondez-vous ?

Et enfin un exercice de DS d'un grand lycée en PCSI :

Si f : A→B est une application, la notation $f^{-1}(C)$ où C est contenu dans B, désigne tous les éléments de A dont l'image appartient à l'ensemble C.

On définit une partie $D = \mathbb{C} \setminus \{i\}$ de $\mathbb{C}$ et une fonction $f : D \to \mathbb{C}$ par la formule $f(z) = \dfrac{1}{\bar{z}+i}$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z.

1.1. Montrer que si $y \in \mathbb{C}^*$, alors l'équation $f(z) = y$ admet une solution unique dans D, que l'on exprimera en fonction de y. Que dire de l'équation dans le cas où $y = 0$?

1.2. Interpréter ce résultat en ce qui concerne la fonction f. Qu'apporte la formule obtenue à la question précédente ?

Quelques images réciproques

1.3. Déterminer les $z \in D$ tels que $f(z) \in \mathbb{R}$. Quel est l'ensemble des points dont l'affixe z est dans $f^{-1}(\mathbb{R})$?

1.4. Déterminer aussi et interpréter géométriquement $f^{-1}(i\mathbb{R})$.

1.5. Même question pour $f^{-1}(U)$, où $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

Quelques images directes

1.6. Quelles sont les valeurs prises par la fonction $\begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \dfrac{1}{y-1} \end{cases}$?

1.7. En déduire $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$.

1.8. Donner la forme algébrique de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1.9. En déduire que l'ensemble des points dont l'affixe est dans $f(\mathbb{R})$ est inclus dans un cercle C de centre $\Omega\left(-\dfrac{i}{2}\right)$ dont on précisera le rayon.

1.10. Montrer plus précisément que cet ensemble est le cercle C privé du point O d'affixe 0.

1.11. Soit $z \in D$. Montrer que $|z| = 1 \Leftrightarrow \operatorname{Im} f(z) = -\dfrac{1}{2}$. Interpréter géométriquement $f(U \setminus \{i\})$.

1.12. Résoudre $f(z) = -\bar{z} + i$.

1.13. Résoudre $f(z) = z$.