Consignes à lire attentivement :

Ce travail qui porte sur le chapitre 1 d'arithmétique est à rendre pour le 7 Novembre.

Vous pouvez, au choix, rendre seul votre copie, ou rendre un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 2 ou 3 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Les DM ont un rôle crucial : ils permettent de vous faire assimiler le cours, de pratiquer des mathématiques, de rédiger, d'acquérir de l'aisance, et d'apprendre à travailler sérieusement.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt automatique de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction.

Les copies ou exercices rendus en retard, ou ne respectant pas ces consignes, ne seront pas corrigés.

Exercice 0 ***(les trois questions sont indépendantes)***

1. La différence entre deux naturels est 538. Si l'on divise l'un par l'autre le quotient est 13 et le reste 34. Quels sont ces deux entiers naturels

2. À la pointe ouest de l'île de Ré, se situe le grand phare des baleines. L'escalier qui mène au sommet a un nombre de marches compris entre 246 et 260.
Ted et Laure sont deux sportifs. Laure qui est plus jeune monte les marches 4 par 4 et à la fin il lui reste 1 marche. Ted, lui, monte les marches 3 par 3 et à la fin il lui reste 2 marches.
Combien l'escalier compte-t-il de marches ?

3. Lorsqu'on divise a par b, le reste est 8 et lorsqu'on divise $2a$ par b, le reste est 5.
Déterminer ce diviseur b.

Exercice I

On appelle répétition de l'unité (rep-unit), tout entier naturel dont chacun des chiffres est égal à 1.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (u_n) par : $u_n = 1111\ldots\ldots1$, où le chiffre 1 est répété n fois.

0) Ecrire les six premiers termes de cette suite, et préciser lesquels sont divisibles par 3.

1) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \frac{10^n-1}{9}$. En particulier à quel ensemble de nombre, " le plus petit possible ", appartient $\frac{10^n-1}{9}$?

2a) Démontrer que pour tous réels a et b, on a l'identité suivante : ♥ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$. ♥

2b) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $10^{3n} - 1$ est divisible par $10^n - 1$.

2c) En déduire que pour tout entier naturel n, u_{3n} est divisible par u_n.

3*a*) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $10^{2n} + 10^n + 1$ est divisible par 3.

3*b*) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, u_{3n} est divisible par $3u_n$.

3*c*) Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels formés de n chiffres tous égaux à 1 et qui sont divisibles par n.

Exercice II

On considère l'équation (E) : $11x^2 - 7y^2 = 5$, avec $x, y \in \mathbb{Z}$..

1) Démontrer que si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (E), alors $x^2 \equiv 2y^2\ (5)$.
2) Soit x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

$x \equiv \ldots\ (5)$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv \ldots\ (5)$					

$y \equiv \ldots\ (5)$	0	1	2	3	4
$2y^2 \equiv \ldots\ (5)$					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?

3) En déduire que si $(x\ ;\ y)$ est solution de (E), alors x et y sont des multiples de 5.
Conclure sur les solutions de (E).

Exercice III

Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse, en justifiant comme il se doit :

a, b et x désignent des entiers relatifs, et n un entier naturel non nul.

Affirmation 1 : « *Si* $a \equiv b\ [n]$, alors : $a^2 \equiv b^2\ [n]$ ».

Affirmation 2 : « *Si* $3a \equiv 3b\ [6n]$, *alors* $a \equiv b\ [2n]$ »,

Affirmation 3 : « $x^2 + x + 3 \equiv 0\ [5]$, si et seulement si $x \equiv 1\ [5]$ ».

Affirmation 4 : « *Le reste dans la division euclidienne de* 10^{2023} *par* 15 *est égal à* 6 ».

Affirmation 5 : « *Pour tout entier naturel n non nul,* $2^n - 1$ *n'est jamais divisible par* 9 ».

Exercice IV

0) Soit n un entier naturel. Démontrer qu'il existe des entiers naturels a et b uniques tels que :
$n = 10a + b$ et $0 \leqslant b \leqslant 9$.

1) Établir la liste des multiples de 13 inférieurs à 100.
2) Montrer que : $n \equiv 0\ (13) \Leftrightarrow a + 4b \equiv 0\ (13)$.
3) Énoncer en français un critère simple de divisibilité par 13.
4) En déduire, sans calculatrice, les multiples de 13 parmi les entiers suivants :
676, 943, 4 652, 156 556.

Exercice V

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $A(n) = n^4 + 1$.

1) Étudier la parité de l'entier $A(n)$.
2) Montrer que, quel que soit l'entier n, $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.
3) Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$: $n^8 \equiv 1\ (d)$.

Exercice VI

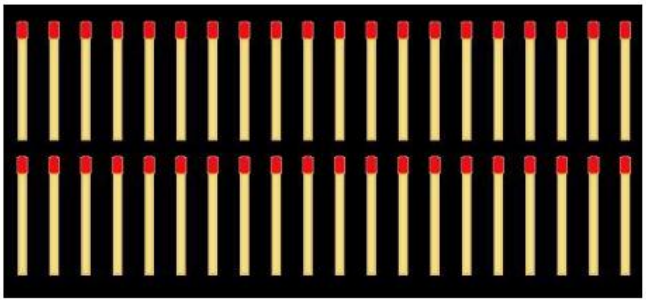
70 p.153 du livre.

Exercice VII

On considère l'équation suivante : $14x^2 + 7y^2 = 10^n$, où les inconnues x *et* y sont des entiers relatifs et n est entier naturel. A l'aide de congruences modulo à vous de voir, démontrer que cette équation n'a aucune solution entière.

Exercice final

Sur la figure ci-dessous, 40 allumettes sont disposées sur le tapis.



Deux joueurs prennent chacun, à tour de rôle, une, deux trois ou quatre allumettes. Celui qui prend la dernière allumettes perd la partie.
Il existe une stratégie gagnante pour le joueur qui commence. Laquelle ?