Maths Expertes Groupe 1 ***Devoir à la maison numéro 1*** ***Septembre 2023***

Consignes à lire attentivement :

Ce travail qui porte sur le début du chapitre 1 d'arithmétique est à rendre pour le 3 Octobre.

Vous pouvez, au choix, rendre seul votre copie, ou rendre un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 2 ou 3 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Les DM ont un rôle crucial : ils permettent de vous faire assimiler le cours, de pratiquer des mathématiques, de rédiger, d'acquérir de l'aisance, et d'apprendre à travailler sérieusement.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt automatique de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction.

Les copies ou exercices rendus en retard, ou ne respectant pas ces consignes, ne seront pas corrigés.

Exercice I

Trouver tous les couples d'entiers relatifs $(x\,;\,y)$ tels que : $x^2 - 2xy = 13$.

Exercice II

Démontrer que pour tout entier naturel n impair, le nombre $n^2 - 1$ est divisible par 8.

Exercice III

1) Soit k un entier impair.

Démontrer que la somme de k entiers consécutifs est toujours divisible par k.

2) Le résultat démontré à la question précédente est-il vrai lorsque k est pair ? Justifier.

Exercice IV

Soit a, b et c des entiers relatifs.

On considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = ax^2+bx+c$.

1) Soit x un entier relatif. Montrer que si x est solution de l'équation $P(x) = 0$, alors x divise c.

2) Enoncer la réciproque de l'affirmation précédente. Cette dernière est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

3) L'équation suivante : $-15x^2 - 16x + 1 = 0$ admet-elle des solutions entières ? Justifier avec soin sans recourir à Δ.

4*) On suppose ici que l'équation $P(x) = 0$ admet deux solutions réelles.

Démontrer que les deux solutions sont soit toutes les deux rationnelles, soit toutes les deux irrationnelles.

Exercice 5 ***(Les questions 1), 2) et 3) sont indépendantes.)***

1) Montrer que pour tout entier relatif n, si $\frac{n(n+2)}{4}$ n'est pas un entier, alors n est impair.

2)

On rappelle que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, c'est-à-dire qu'il est impossible d'écrire $\sqrt{2}$ comme quotient de deux entiers.

Soit a, b, c et d quatre nombres rationnels.

Montrer que : $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ équivaut à : $b = d$ et $a = c$.

3*)

Soient a et b deux rationnels strictement positifs. On suppose que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont irrationnels. Montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est irrationnel.

<u>Remarque</u> : les questions avec une étoile sont plus délicates, il ne faut pas vous affoler si vous avez du mal à les traiter ou si vous ne parvenez pas à les résoudre.