

Consignes à lire attentivement :

Ce travail qui porte sur le chapitre 6 est à rendre pour le 5 Mai. Il est constitué par les exercices du cours que nous n'avons pas eu le temps de traiter en classe.

*Vous pouvez, au choix, rendre seul votre copie, ou rendre un seul lot de copies **DOUBLES** par groupe de 2 ou 3 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.*

Les DM ont un rôle crucial : ils permettent de vous faire assimiler le cours, de pratiquer des mathématiques, de rédiger, d'acquérir de l'aisance, et d'apprendre à travailler sérieusement.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt automatique de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction.

Les copies ou exercices rendus en retard, ou ne respectant pas ces consignes, ne seront pas corrigés.

Exercice I (Construction d'un pentagone régulier à la règle et au compas).

Notons $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

1a) Exprimer en fonction de ω les racines dans \mathbb{C} de l'équation : $z^5 - 1 = 0$.

1b) En déduire que : $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

2) On note $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.

a) Montrer que $\alpha + \beta = -1$ et que $\alpha\beta = -1$.

b) En déduire la valeur de α et β , puis la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. On commencera par expliquer pourquoi $\omega^4 = \bar{\omega}$, et on sera conduit à résoudre une équation du second degré.

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

On appelle A_0 le point d'affixe 1, K le point d'affixe i , et M le point d'affixe $\frac{-1}{2}$.

a) Placer ces points dans le repère.

b) On considère le cercle \mathcal{C} de centre M et de rayon MK. Déterminer la valeur de MK, puis déterminer l'affixe du point P intersection du cercle \mathcal{C} et de la demi-droite $[OA_0)$.

En déduire une construction à l'aide de la règle et du compas des points A_1, A_2, A_3, A_4 d'affixes respectives : $\omega, \omega^2, \omega^3$ et ω^4 , puis construire le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$

Exercice II

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

a) $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$.

b) $z^3 = (4+i)^3$.

c) $(z-1)^5 = (z+1)^5$.

d) (facultative)

$z^n = j$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 fixé et $j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On commencera par écrire z sous forme exponentielle.

Exercice III

Soit P la fonction polynôme définie sur \mathbb{C} par : $P(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2$.

a) Déterminer les racines de P sachant qu'il y a une racine réelle évidente.

b) Résoudre dans $\mathbb{C} - \{-1\}$ l'équation : $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 - 2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right) - 2 = 0$.

Exercice IV

1) Donner la forme algébrique de : $z = (1 + 2i)^5$

2) Calculer rapidement et sans calculatrice : 999999^3

3) x et y sont des réels. Développer et réduire : $(2x - y)^6$.

4) Simplifier chacune des sommes suivantes :

$$S_3 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \quad S_4 = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1} \quad S_5 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 3^{k-n}$$

Exercice V (facultatif mais géant)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2

Pour tout entier naturel k compris entre 0 et $n - 1$, notons A_k le point du plan complexe ayant pour affixe $\omega^k = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k$.

Soit M un point quelconque du cercle unité \mathbb{U} . On appelle z l'affixe du point M .

0) Rappeler sans démonstration combien vaut la somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

i) Démontrer que pour tout entier k compris entre 0 et $n - 1$, $MA_k^2 = 2 - 2\operatorname{Re}(\bar{z}\omega^k)$.

ii) Dédire de la question a) que $\sum_{k=0}^{n-1} MA_k^2$ est une constante indépendante de l'affixe du point M .

iii) Donner une interprétation géométrique de cette dernière somme.