Consignes à lire attentivement :

Ce travail qui porte sur le chapitre 6 est à rendre pour le 5 Mai. Il est constitué par les exercices du cours que nous n'avons pas eu le temps de traiter en classe.

Vous pouvez, au choix, rendre seul votre copie, ou rendre un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 2 ou 3 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Les DM ont un rôle crucial : ils permettent de vous faire assimiler le cours, de pratiquer des mathématiques, de rédiger, d'acquérir de l'aisance, et d'apprendre à travailler sérieusement.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt automatique de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction.

Les copies ou exercices rendus en retard, ou ne respectant pas ces consignes, ne seront pas corrigés.

Exercice I ***(Construction d'un pentagone régulier à la règle et au compas).***

Notons $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

1a) Exprimer en fonction de ω les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^5 - 1 = 0$.

1b) En déduire que : $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

2) On note $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.

a) Montrer que $\alpha + \beta = -1$ et que $\alpha\beta = -1$.

b) En déduire la valeur de α et β, puis la valeur exacte de $cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. On commencera par expliquer pourquoi $\omega^4 = \overline{\omega}$, *et on sera conduit à résoudre une équation du second degré.*

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

On appelle A_0 le point d'affixe 1, K le point d'affixe i, et M le point d'affixe $\frac{-1}{2}$.

a) Placer ces points dans le repère.
b) On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre M et de rayon MK. Déterminer la valeur de MK, puis déterminer l'affixe du point P intersection du cercle $\mathscr{C}$ et de la demi-droite $[OA_0)$.

En déduire une construction à l'aide de la règle et du compas des points A_1, A_2, A_3, A_4 d'affixes respectives : ω, ω^2, ω^3 *et* ω^4, puis construire le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$

Exercice II

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$.
b) $z^3 = (4 + i)^3$.
c) $(z - 1)^5 = (z + 1)^5$.

$d)$ $(facultative)$

$z^n = j$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 fixé et $j \ = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On commencera par écrire z sous forme exponentielle.

Exercice III

Soit P la fonction polynôme définie sur $\mathbb{C}$ par : P(z) = $z^3 - 2z^2 + z - 2$.

a) Déterminer les racines de P sachant qu'il y a une racine réelle évidente.

b) Résoudre dans $\mathbb{C} - \{-1\}$ l'équation : $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 - 2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right) - 2 = 0$.

Exercice IV

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2

Pour tout entier naturel k compris entre 0 et n – 1, notons A_k le point du plan complexe ayant pour affixe $\omega^k = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k$.

Soit M un point quelconque du cercle unité $\mathbb{U}$. On appelle z l'affixe du point M.

0) Rappeler sans démonstration combien vaut la somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

i) Démontrer que pour tout entier k compris entre 0 et $n - 1$, $MA_k^2 = 2 - 2Re(\bar{z}\omega^k)$.

ii) Déduire de la question a) que $\sum_{k=0}^{n-1} MA_k^2$ est une constante indépendante de l'affixe du point M.

iii) Donner une interprétation géométrique de cette dernière somme.