Exercice I

1) $z_1 = -1 + i$

$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et si θ est l'argument principal de z_1, alors : $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

donc $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Par suite, $\boxed{z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}}$

$\boxed{z_2} = -2e^{-i\frac{\pi}{2}} = -2 \times (-i) = 2i = \boxed{2e^{i\frac{\pi}{2}}}$

2) $z_3 = \frac{z_1^3}{z_2}$, donc $\arg(z_3) = \arg\left(\frac{z_1^3}{z_2}\right) = \arg(z_1^3) - \arg(z_2) \quad [2\pi]$.

$\arg(z_3) = 3\arg(z_1) - \arg(z_2) \quad [2\pi]$

$\arg(z_3) = 3 \times \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{4} - \frac{2\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \quad [2\pi]$.

Or $\frac{7\pi}{4} \notin]-\pi ; \pi]$ et $\frac{7\pi}{4} - 2\pi = -\frac{\pi}{4}$, donc $\boxed{\arg_p(z_3) = -\frac{\pi}{4}}$

Exercice II

$\theta \in]-\pi ; \pi[$ donc $1 + e^{i\theta} \neq 0$. En effet $e^{i\theta} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{i\theta} = -1 \Leftrightarrow \theta = \pi \; [2\pi]$.

Soit $z = \frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}\right)}$ (technique de l'angle moitié).

$\boxed{z} = -\frac{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \boxed{-i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ où $\mathrm{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

Formules d'Euler : $\begin{cases} \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ donc } e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2} = 2\cos(\theta/2). \\ \frac{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}}{2i} = -\left(\frac{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}}{2i}\right) = -\sin(\theta/2) \end{cases}$

Donc z est imaginaire pur.

Exercice III

$x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, donc $\sin(x) \neq 0$ et $\cos(x) \neq 0$.

$\sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) = \sin(a-b)$

$$\frac{\sin(3x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(3x)}{\cos(x)} = \frac{\sin(3x)\cos(x) - \cos(3x)\sin(x)}{\sin(x)\cos(x)} = \frac{\sin(3x-x)}{\frac{1}{2}\times \underbrace{2\sin(x)\cos(x)}_{=\sin(2x)}}$$

duplication.

$$\boxed{\frac{\sin(3x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(3x)}{\cos(2x)}} = \frac{\sin(2x)}{\frac{1}{2}\times\sin(2x)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \boxed{2}.$$

Exercice IV

a) $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

b) $(a+b)^4 = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}a^{4-k}b^k = \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4.$

$$\boxed{(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}$$

$\binom{4}{2} = \frac{4\times 3}{2} = 6.$

c) D'après q.a) :

$$\cos^4(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}\times\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^4.$$

D'après q b) appliquée à : $a = e^{ix}$ et $b = e^{-ix}$ on a :

$$\cos^4(x) = \frac{1}{16}\left((e^{ix})^4 + 4(e^{ix})^3e^{-ix} + 6\underbrace{(e^{ix})^2(e^{-ix})^2}_{=1} + 4e^{ix}(e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4\right).$$

$$\cos^4(x) = \frac{1}{16}\left(e^{i4x} + 4e^{i2x} + 6 + 4e^{-i2x} + e^{-i4x}\right)$$

Car $(e^{ix})^n = e^{inx}$

$e^{ipx}\times e^{iqx} = e^{i(p+q)x}$.

$$\cos^4(x) = \frac{1}{16}\left(\underbrace{e^{i4x}+e^{-i4x}}_{\text{F Euler.}} + 4\left(\underbrace{e^{i2x}+e^{-i2x}}_{\text{F. Euler} = 2\cos(2x)}\right) + 6\right)$$

$$\cos^4(x) = \frac{1}{16}\left(2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6\right).$$

$$\boxed{\cos^4(x) = \frac{\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3}{8}}$$

d) $f(x) = \cos^4(x) = \frac{1}{8}\left(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3\right)$ d'après q.c).

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$: $F(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{\sin(4x)}{4} + 4\times\frac{\sin(2x)}{2} + 3x\right)$

$$\boxed{F(x)} = \frac{\sin(4x)}{32} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{3x}{8} = \boxed{\frac{\sin(4x) + 8\sin(2x) + 12x}{32}}$$

Exercice V

a) $(2i)^5 = 32i^5 = 32i^4 \times i = 32i$ $\qquad i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1.$

b) $P(z) = z^5 - 32i = z^5 - (2i)^5 = (z-2i)\times(z^4 + 2iz^3 + (2i)^2z^2 + (2i)^3 z + (2i)^4).$

$a^n - b^n = (a-b)\times \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

$\boxed{P(z) = (z-2i)(z^4 + 2iz^3 - 4z^2 - 8iz + 16)}$

Exercice VI

$\theta \in \mathbb{R}$ et $P(z) = z^3 + (2\sin(\theta)-1)z^2 + (1-2\sin(\theta))z - 1.$

a) $\boxed{P(1)} = 1^3 + (2\sin(\theta)-1)\times 1^2 + (1-2\sin(\theta))\times 1 - 1 = \cancel{1} + \cancel{2\sin(\theta)} - \cancel{1} + \cancel{1} - \cancel{2\sin(\theta)} - \cancel{1} = \boxed{0}$

Donc 1 est racine de P.

b) D'après a) 1 est racine de P, donc on factorise P par $z-1$:

$P(z) = (z-1)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré 2, donc il existe $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$ tels que : $P(z) = az^2 + bz + c.$

$P(z) = (z-1)(az^2 + bz + c)$ on développe et réduit

Donc $\forall z \in \mathbb{C}$: $z^3 + (2\sin(\theta)-1)z^2 + (1-2\sin(\theta))z - 1 = az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c$

Par identification :
$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 2\sin(\theta) - 1 \\ c - b = 1 - 2\sin(\theta) \\ -c = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 2\sin(\theta) \\ c = 1 \end{cases}.$$

Ainsi, $\boxed{P(z) = (z-1)(z^2 + 2\sin(\theta)z + 1)}$

Enfin factorisons $z^2 + 2\sin(\theta)z + 1$ (trinôme du 2e degré). Pythagore : $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.$

$\Delta = 4\sin^2(\theta) - 4 = 4(\sin^2(\theta) - 1) = -4\cos^2(\theta)$

$\Delta \leq 0$ donc ce trinôme admet dans $\mathbb{C}$ deux racines (éventuellement confondues) :

$$z_1 = \frac{-2\sin(\theta) - i\sqrt{|\Delta|}}{2} = \frac{-2\sin(\theta) - i\sqrt{4\cos^2(\theta)}}{2} = \frac{-2\sin(\theta) - 2i|\cos(\theta)|}{2}$$

$$z_1 = -\sin(\theta) - i|\cos(\theta)|$$

et $z_2 = \overline{z_1} = -\sin(\theta) + i|\cos(\theta)|$

Au vu du rôle symétrique joué par z_1 et z_2 les racines du trinôme sont :

$\alpha_1 = -\sin(\theta) - i\cos(\theta)$ et $\alpha_2 = -\sin(\theta) + i\cos(\theta)$

$\alpha_1 = -i(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ et $\alpha_2 = \overline{\alpha_1}$

$\underline{\alpha_1 = -ie^{i\theta} = e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}}$ et $\underline{\alpha_2 = e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta)}}$ car $\overline{e^{i\omega}} = e^{-i\omega}$, $\omega \in \mathbb{R}$.

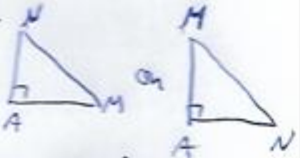
Donc on factorise P en : $P(z) = (z-1)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)$

$$\boxed{P(z) = (z-1)\left(z - e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}\right)\left(z - e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta)}\right)}$$

Exercice VII

$z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$. $z_A = i$; $z_M = z$ et $z_N = iz$.

a) $\arg\left(\frac{iz - i}{z - i}\right) = \arg\left(\frac{z_N - z_A}{z_M - z_A}\right) = (\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{AN})$ $[2\pi]$



b) AMN est rectangle en A si et seulement si : $(\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{AN}) = \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$

Ce qui équivaut à dire que $\arg\left(\frac{iz-i}{z-i}\right) = \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$ ou encore que $\frac{iz-i}{z-i}$ est imaginaire pur.

Or $\frac{iz-i}{z-i} = \frac{i(z-1)}{z-i}$. Donc $\frac{iz-i}{z-i} \in i\mathbb{R}$ équivaut à $\frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R}$.

Soit B le point d'affixe $z_B = 1$: $\frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R} \overset{z\neq 1 ; z \neq i}{\iff} \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$ $[\pi]$

$\iff (\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{BM}) = 0$ $[\pi]$

$\iff M \in (AB)\setminus\{A ; B\}$.

Ainsi AMN est rectangle en A si et seulement si M appartient à la droite (AB) privée des points A et B où $z_A = i$ et $z_B = 1$ (c'est la droite d'équation réduite $y = -x + 1$).

Le tracé est [illegible]

Exercice VIII

$n \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$.

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{i2kp\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{\frac{i2p\pi}{n}}\right)^k$$

Distinguons deux cas : *) Si $e^{\frac{i2p\pi}{n}} = 1$ c'est à dire si $\frac{2p\pi}{n} = 2\lambda\pi$ où $\lambda \in \mathbb{Z}$

i.e $p = \lambda n$ i.e n divise p

alors $\boxed{S} = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{\text{Somme de } n \text{ termes.}} = \boxed{n}$

**) Si $e^{\frac{i2p\pi}{n}} \neq 1$, c'est à dire si n ne divise pas p :

$$\boxed{S} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{\frac{i2p\pi}{n}}\right)^k = \frac{1 - \left(e^{\frac{i2p\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{i2p\pi}{n}}} = \frac{1 - e^{i2p\pi}}{1 - e^{\frac{i2p\pi}{n}}} = \frac{1-1}{1 - e^{\frac{i2p\pi}{n}}} = \boxed{0}$$

Somme des premiers termes d'une suite géométrique

Car $e^{i2p\pi} = \left(e^{i2\pi}\right)^p = 1^p = 1$.

$\left(e^{\frac{i2p\pi}{n}}\right)^n = e^{\frac{i2p\pi}{n} \times n} = e^{i2p\pi}$.

$$\boxed{S = \begin{cases} n \text{ si } n \mid p \\ 0 \text{ si } n \nmid p. \end{cases}}$$

Bonus

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} ; 0\leq k\leq n-1 \right\}$: tout élément de $\mathbb{U}_n \in \mathbb{U}$ car $\left|e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right|=1$.

On rappelle que $\mathbb{U} = \{z\in\mathbb{C} / |z|=1\}$.

On veut savoir si $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n = \mathbb{U}$ ou si $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n \subsetneq \mathbb{U}$ ← strictement contenu dans $\mathbb{U}$.

Par l'absurde : si $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n = \mathbb{U}$, alors, en particulier le nombre $z = e^{1i} = e^{i}$ (qui est de module 1 car $|e^{i}| = |e^{1i}| = \sqrt{\cos^2(1)+\sin^2(1)} = \sqrt{1} = 1$) appartiendrait à $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n$.

→ appartenir à l'ensemble, c'est être dans au moins l'un de ces ensembles.

Alors il existerait un entier naturel, notons le p tel que $e^{i} \in \mathbb{U}_p$

Donc $\exists k\in[\![0;p-1]\!]$, $e^{i} = e^{i\frac{2k\pi}{p}}$, donc $1 = 1\times\frac{2k\pi}{p} + 2\lambda\pi$ où $\lambda\in\mathbb{Z}$

($e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta = \theta' \, [2\pi]$).

Donc $\underbrace{p}_{\text{entier}} = \pi(\underbrace{2k+2\lambda p}_{\in\mathbb{Z}})$

Donc $\pi\in\mathbb{Q}$ ce qui est absurde. (π n'est pas rationnel cela se montre à l'aide d'intégrales à bac+1).

Donc $\boxed{\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n \subsetneq \mathbb{U}}$