

Exercice I

$$1) z_1 = -1 + i$$

$$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ et si } \theta \text{ est l'argument principal de } z_1, \text{ alors: } \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{donc } \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Par suite, } \boxed{z_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

$$\boxed{z_2} = -2e^{-i\frac{\pi}{2}} = -2 \times (-i) = 2i = \boxed{2e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

$$2) z_3 = \frac{z_1^3}{z_2}, \text{ donc } \arg(z_3) = \arg\left(\frac{z_1^3}{z_2}\right) = \arg(z_1^3) - \arg(z_2) \quad [2\pi]$$

$$\arg(z_3) = 3\arg(z_1) - \arg(z_2) \quad [2\pi]$$

$$\arg(z_3) = 3 \times \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{4} - \frac{2\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \quad [2\pi]$$

$$\text{Or } \frac{7\pi}{4} \notin]-\pi; \pi] \text{ et } \frac{7\pi}{4} - 2\pi = -\frac{\pi}{4}, \text{ donc } \boxed{\arg_p(z_3) = -\frac{\pi}{4}}$$

Exercice II

$$\theta \in]-\pi; \pi[\text{ donc } 1 + e^{i\theta} \neq 0. \text{ En effet } e^{i\theta} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{i\theta} = -1 \Leftrightarrow \theta = \pi \quad [2\pi].$$

$$\text{Soit } z = \frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})} \quad (\text{technique de l'angle moitié}).$$

$$\boxed{z} = \frac{-2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \boxed{i \cotan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{ou } \cotan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\text{Formules d'Euler: } \begin{cases} \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ donc } e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{2i} = -\left(\frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2i}\right) = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

Donc z est imaginaire pur.

Exercise III

$x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, donc $\sin(x) \neq 0$ et $\cos(x) \neq 0$.

$$\frac{\sin(3x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(3x)}{\cos(x)} = \frac{\sin(3x)\cos(x) - \cos(3x)\sin(x)}{\sin(x)\cos(x)} = \frac{\sin(3x-x)}{\frac{1}{2} \times 2\sin(x)\cos(x)}$$

$\sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) = \sin(a-b)$
simplification

$$\boxed{\frac{\sin(3x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(3x)}{\cos(x)} = \frac{\sin(2x)}{\frac{1}{2} \times \sin(2x)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2}$$

Exercise IV

a) $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

b) $(a+b)^4 = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} a^{4-k} b^k = \binom{4}{0} a^4 b^0 + \binom{4}{1} a^3 b^1 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a^1 b^3 + \binom{4}{4} a^0 b^4$

$$\boxed{(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6.$$

c) d'après q.a):

$$\cos^4(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 = \frac{1}{2^4} \times (e^{ix} + e^{-ix})^4 = \frac{1}{16} (e^{ix} + e^{-ix})^4$$

d'après q.b) appliquez à $a = e^{ix}$ et $b = e^{-ix}$ on a:

$$\cos^4(x) = \frac{1}{16} \left((e^{ix})^4 + 4(e^{ix})^3 e^{-ix} + 6 \underbrace{(e^{ix})^2 (e^{-ix})^2}_{=1} + 4e^{ix} (e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4 \right)$$

$$\cos^4(x) = \frac{1}{16} \left(e^{i4x} + 4e^{i2x} + 6 + 4e^{-i2x} + e^{-i4x} \right)$$

$$\begin{aligned} \cos(e^{ix})^3 &= e^{i3x} \\ e^{i3x} \times e^{ix} &= e^{i(3+1)x} \end{aligned}$$

$$\cos^4(x) = \frac{1}{16} \left(\underbrace{e^{i4x} + e^{-i4x}}_{\text{F. Euler.}} + 4 \underbrace{(e^{i2x} + e^{-i2x})}_{\text{F. Euler} = 2\cos(2x)} + 6 \right)$$

$$\cos^4(x) = \frac{1}{16} \left(2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6 \right)$$

$$\boxed{\cos^4(x) = \frac{\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3}{8}}$$

d) $f(x) = \cos^4(x) = \frac{1}{8} (\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3)$ d'après q.c).

Soit une primitive de f sur \mathbb{R} : $F(x) = \frac{1}{8} \left(\frac{\sin(4x)}{4} + 4x \frac{\sin(2x)}{2} + 3x \right)$

$$\boxed{F(x) = \frac{\sin(4x)}{32} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{3x}{8} = \frac{\sin(4x) + 8\sin(2x) + 12x}{32}}$$

Exercice V

$$a) (2i)^5 = 32i^5 = 32i^4 \times i = 32i$$

$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1.$$

$$b) P(z) = z^5 - 32i = z^5 - (2i)^5 = (z - 2i) \times (z^4 + 2iz^3 + (2i)^2 z^2 + (2i)^3 z + (2i)^4).$$

$$a^m - b^m = (a-b) \times \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k}$$

$$P(z) = (z - 2i)(z^4 + 2iz^3 - 4z^2 - 8iz + 16)$$

Exercice VI

$$\theta \in \mathbb{R} \text{ et } P(z) = z^3 + (2\sin(\theta) - 1)z^2 + (1 - 2\sin(\theta))z - 1.$$

$$a) \boxed{P(1)} = 1^3 + (2\sin(\theta) - 1) \times 1^2 + (1 - 2\sin(\theta)) \times 1 - 1 = \cancel{1} + \cancel{2\sin(\theta)} - \cancel{1} + \cancel{1} - \cancel{2\sin(\theta)} - \cancel{1} = 0$$

donc 1 est racine de P.

b) D'après a) 1 est racine de P, donc on factorise P par $z - 1$:

$$P(z) = (z - 1)Q(z) \text{ où } Q \text{ est un polynôme de degré 2, donc il existe } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b, c \in \mathbb{C} \text{ tels que: } P(z) = az^2 + bz + c.$$

$$P(z) = (z - 1)(az^2 + bz + c) \quad \text{on développe et réduit}$$

$$\text{Donc } \forall z \in \mathbb{C}: z^3 + (2\sin(\theta) - 1)z^2 + (1 - 2\sin(\theta))z - 1 = az^3 + (b - a)z^2 + (c - b)z - c$$

Par identification:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 2\sin(\theta) - 1 \\ c - b = 1 - 2\sin(\theta) \\ -c = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 2\sin(\theta) \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{P(z) = (z - 1)(z^2 + 2\sin(\theta)z + 1)}$$

Enfin Factorisons $z^2 + 2\sin(\theta)z + 1$ (trinôme du 2^e degré). Pythagore: $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.$

$$\Delta = 4\sin^2(\theta) - 4 = 4(\sin^2(\theta) - 1) = -4\cos^2(\theta)$$

$\Delta \leq 0$ donc ce trinôme admet des \mathbb{C} deux racines (elles sont confondues).

$$z_1 = \frac{-2\sin(\theta) - i\sqrt{|A|}}{2} = \frac{-2\sin(\theta) - i\sqrt{4\cos^2(\theta)}}{2} = \frac{-2\sin(\theta) - 2i|\cos(\theta)|}{2}$$

$$z_1 = -\sin(\theta) - i|\cos(\theta)|$$

et $z_2 = \bar{z}_1 = -\sin(\theta) + i|\cos(\theta)|$

Au vu du rôle symétrique joué par z_1 et z_2 des racines de racines sont :

$$\alpha_1 = -\sin(\theta) - i\cos(\theta) \quad \text{et} \quad \alpha_2 = -\sin(\theta) + i\cos(\theta)$$

$$\alpha_1 = -i(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \bar{\alpha}_1$$

$$\alpha_1 = -ie^{i\theta} = e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta)} \quad \text{car } e^{i\omega} = \overline{e^{-i\omega}} \text{ avec } \omega \in \mathbb{R}.$$

donc on factorise P en : $P(z) = (z-1)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)$

$$P(z) = (z-1)(z - e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})})(z - e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta)})$$

Exercice VII

$z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. $z_A = i$; $z_M = z$ et $z_N = iz$.

a) $\arg\left(\frac{iz-i}{z-i}\right) = \arg\left(\frac{z_N - z_A}{z_M - z_A}\right) = (\vec{AM}; \vec{AN}) \quad [2\pi]$

b) AMN est rectangle en A si et seulement si : $(\vec{AM}; \vec{AN}) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$

Ce qui équivaut à dire que $\arg\left(\frac{iz-i}{z-i}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$ ou encore que $\frac{iz-i}{z-i}$ est imaginaire pur.

ou $\frac{iz-i}{z-i} = \frac{i(z-1)}{z-i}$. Avec $\frac{iz-i}{z-i} \in i\mathbb{R}$ équivaut à $\frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R}$.

Soit B le point d'affixe $z_B = 1$: $\frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R} \iff \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0 \quad [\pi]$

$$\iff (\vec{AM}; \vec{BM}) = 0 \quad [\pi]$$

$$\iff M \in (AB) \setminus \{A; B\}$$

Ainsi AMN est rectangle en A si et seulement si M appartient à la droite (AB) privé des points A et B où $z_A = i$ et $z_B = 1$ (c'est la droite d'équation réduite $y = -x + 1$).

\Rightarrow vrai et des évident.

Exercise VIII

$m \geq 1, p \in \mathbb{N}$.

$$S = \sum_{k=0}^{m-1} e^{\frac{i2kp\pi}{m}} = \sum_{k=0}^{m-1} \left(e^{\frac{i2p\pi}{m}} \right)^k$$

Distinguer deux cas: *) Si $e^{\frac{i2p\pi}{m}} = 1$ c'est à dire si $\frac{2p\pi}{m} = 2\lambda\pi$ ou $\lambda \in \mathbb{Z}$

alors $S = \sum_{k=0}^{m-1} 1 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{\text{Somme de } m \text{ termes}} = m$

i.e $p = \lambda m$ i.e m divise p

**) Si $e^{\frac{i2p\pi}{m}} \neq 1$, c'est à dire si m ne divise pas p :

$$S = \sum_{k=0}^{m-1} \left(e^{\frac{i2p\pi}{m}} \right)^k = \frac{1 - \left(e^{\frac{i2p\pi}{m}} \right)^m}{1 - e^{\frac{i2p\pi}{m}}} = \frac{1 - e^{\frac{i2p\pi}{m}}}{1 - e^{\frac{i2p\pi}{m}}} = \frac{1-1}{1-e^{\frac{i2p\pi}{m}}} = 0$$

Somme des puissances d'une suite géométrique

Car $e^{\frac{i2p\pi}{m}} = \left(e^{\frac{i2\pi}{m}} \right)^p = 1^p = 1$

$$\left(e^{\frac{i2p\pi}{m}} \right)^m = e^{\frac{i2p\pi}{m} \times m} = e^{\frac{i2p\pi}{m} \times m} = e^{i2p\pi} = 1$$

$$S = \begin{cases} m & \text{si } m | p \\ 0 & \text{si } m \nmid p \end{cases}$$