Exercice I

a) A a 3 lignes et 3 colonnes
B a 3 lignes et 2 colonnes
C a 3 lignes et 1 colonne

b) AB existe car le nombre de colonne de A est 3 et ce dernier est égal au nombre de lignes de B (3).

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 7 & -2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

BA n'existe pas car le nombre de colonne de B (2) n'est pas égal au nombre de lignes de A (3).

AC existe car A a 3 colonnes et C a 3 lignes : $\boxed{AC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}.$

c) $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, donc avec la machine, $\boxed{D} = (A - 2I_3)^2 = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}}$

d) $\boxed{E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

e) $\boxed{M \times I_n \times M^{-1}} = M \times M^{-1} = \boxed{I_n}$; $2M \times (3M^{-1} - 5I_n) = 2 \times 3 \times \underbrace{M \times M^{-1}}_{I_n} - 2 \times 5 \times \underbrace{M \times I_n}_{M} = 6I_n - 10M$

$$(M - I_n)(2M^{-1} + 3I_n) = M \times 2M^{-1} + M \times 3I_n - I_n \times 2M^{-1} - I_n \times 3I_n = 2\underbrace{MM^{-1}}_{I_n} + 3\underbrace{MI_n}_{M} - 2I_nM^{-1} - 3I_n^2$$

$$(M - I_n)(2M^{-1} + 3I_n) = 2I_n + 3M - 2M^{-1} - 3I_n \qquad (I_n^2 = I_n).$$

$$\boxed{(M - I_n)(2M^{-1} + 3I_n) = -I_n + 3M - 2M^{-1}.}$$

Exercice II

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

1) $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 1\times 6 - 4\times(-1) = 6+4 = 10.$

Or $10 \neq 0$, donc $\det(A) \neq 0$ et A est inversible.

2) $\boxed{A^{-1}} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix}}.$

Exercice III

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Grâce à une machine, $(A-I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\boxed{(A-I_3)^2 = O_3}$

2) $(A-I_3)^2 = O_3$ et $(A-I_3)^2 = (A-I_3)(A-I_3) = A^2 - \underbrace{AI_3}_{A} - \underbrace{I_3A}_{A} + \underbrace{I_3 \cdot I_3}_{I_3}$

$(A-I_3)^2 = A^2 - A - A + I_3 = A^2 - 2A + I_3.$

Autrement dit : $A^2 - 2A + I_3 = O_3$

$A^2 - 2A = O_3 - I_3$

donc : $A(A - 2I_3) = -I_3$

Donc $A(-A + 2I_3) = I_3$: Cela signifie que A est inversible et son inverse est :

$A^{-1} = -A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -2 & -3 & -6 \\ +1 & +1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}}$

Exercice IV

1) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$M^2 \overset{\text{Machine}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\boxed{M^2 = O_3}$.

2) Par l'absurde, supposons M inversible :

Comme $M^2 = O_3$, en prémultipliant les deux membres de cette égalité par M^{-1}, on aurait alors,

$$\underbrace{M^{-1} \times M^2}_{} = \underbrace{M^{-1} \times O_3}_{}$$

$M = O_3$: ce n'est absurde car M n'est pas vraiment la matrice nulle ! (aucun de ses coefficient n'est nul).

donc $\boxed{\text{M n'est pas inversible}}$.

Exercice V

$a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$

0) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + a \times \frac{1}{a} + a^2 \times \frac{1}{a^2} & a^2 \times \frac{1}{a} & a^2 \\ a \times \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \times a + a \times \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \times a^2 \\ \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} \times a & \frac{1}{a^2} \times a^2 + \frac{1}{a} \times a \end{pmatrix}$

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 2 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 2 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 2 \end{pmatrix}}$$

; $-A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a^2 \\ -\frac{1}{a} & 0 & -a \\ -\frac{1}{a^2} & -\frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$; $-2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1)

donc $A^2 - A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2-0-2 & a-a & a^2-a^2 \\ \frac{1}{a}-\frac{1}{a} & 2-2 & a-a \\ \frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a}-\frac{1}{a} & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Bref, $\boxed{A^2 - A - 2I_3 = O_3}$

2) D'après q.1, on a : $A^2 - A - 2I_3 = 0_3$

Donc $A^2 - A = 2I_3$

Donc $\frac{A^2 - A}{2} = I_3$

Donc $\frac{A(A-I)}{2} = I_3$, donc : $A \times \frac{A-I}{2} = I_3$: donc A est inversible

d'inverse $\boxed{A^{-1} = \frac{A-I}{3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & -1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & -1 \end{pmatrix}}$

3) On procède par récurrence : Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $\exists (\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ tq : $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3$.

Initialisation : Pour $n=0$: $A^0 = I_3$, donc en posant : $\alpha_0 = 0$ et $\beta_0 = 1$, $A^0 = \alpha_0 A + \beta_0 I_3$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier fixé. Supposons que pour cet entier là, $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, c'est à dire

que : $\underbrace{\exists (\alpha_n ; \beta_n) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq : } A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3}_{\text{hypothèse de récurrence.}}$.

Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire prouvons l'existence de deux réels α_{n+1} et β_{n+1}

tels que : $\underbrace{A^{n+1} = \alpha_{n+1} A + \beta_{n+1} I_3}_{\text{But.}}$.

Or $A^{n+1} = A^n \cdot A \overset{\text{Hypothèse de récurrence}}{=} (\alpha_n A + \beta_n I_3) \cdot A = \alpha_n A^2 + \beta_n I_3 \cdot A = \alpha_n A^2 + \beta_n A$.

Or d'après q.1), $A^2 - A - 2I_3 = 0_3$, donc $A^2 = A + 2I_3$, de sorte que :

$$A^{n+1} = \alpha_n (A + 2I_3) + \beta_n A = \alpha_n A + 2\alpha_n I_3 + \beta_n A$$

$$A^{n+1} = (\alpha_n + \beta_n) A + 2\alpha_n I_3 :$$ Je pose : $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \beta_n$ et $\beta_{n+1} = 2\alpha_n$.

Ainsi, $A^{n+1} = \alpha_{n+1} A + \beta_{n+1} I_3$: donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ vraie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

4) Explicitons les suites (α_n) et (β_n) telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3$.

Or par q.3), $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n + \beta_n \\ \beta_{n+1} = 2\alpha_n. \end{cases}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n+1} - \beta_{n+1} = \alpha_n - \beta_n$: la suite $(\alpha_n - \beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc constante et égale à $\alpha_0 - \beta_0 = 0 - 1 = -1$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n - \beta_n = -1}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\beta_{n+1} = 2\alpha_n = 2(\beta_n + 1) = 2\beta_n + 2$

De là, en posant $w_n = \beta_n + 2$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{\beta_{n+1}}_{w_{n+1} - 2} = 2\beta_n + 2$

$w_{n+1} - 2 = 2(w_n - 2) + 2$

$w_{n+1} - 2 = 2w_n - 4 + 2$.

$w_{n+1} = 2w_n$: donc (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 \times 2^n$ avec $w_0 = \beta_0 + 2 = 1 + 2 = 3$.

$$\boxed{w_n = 3 \times 2^n}$$

Donc $\boxed{\beta_n} = w_n - 2 = \boxed{3 \times 2^n - 2}$

et $\alpha_n - \beta_n = -1$, donc $\alpha_n = \beta_n - 1 = 3 \times 2^n - 2 - 1 = 3 \times 2^n - 3$

$$\boxed{\alpha_n = 3(2^n - 1)}$$