Exercice I

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\boxed{M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$

a) Le système (S) : $\begin{cases} 3x + y + 4z = 5 \\ 2x - y = 0 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$ s'écrit matriciellement : $M.X = B$.

b) Grâce à une calculatrice, M est inversible, et $M.X = B$, donc : $M^{-1}.(M.X) = M^{-1}.B$

Donc $(M^{-1}.M).X = M^{-1}.B$, donc $I.X = M^{-1}.B$, donc $X = M^{-1}.B$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \quad S = \{(1;2;0)\}$$

Exercice II

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

1a) $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8\times0{,}8 + 0{,}8\times0{,}2 & 0{,}8\times0{,}8 + 0{,}8\times0{,}2 \\ 0{,}2\times0{,}8 + 0{,}2\times0{,}2 & 0{,}2\times0{,}8 + 0{,}2\times0{,}2 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$. On remarque que $\boxed{A^2 = A}$.

1b) Si A était inversible, alors comme $A^2 = A$, on aurait : $A^{-1} \times A^2 = A^{-1} \times A$, donc : $A^{-1} \times A \times A = I$

Donc $I \times A = I$, donc $A = I$, donc $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: Ceci est absurde, car deux matrices de même taille sont égales ssi elles ont les mêmes coefficients situés aux mêmes endroits (ici $0{,}8 \neq 1$). Donc $\boxed{A \text{ n'est pas inversible}}$.

2a) $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}$.

2b) $(a+d).M = \begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix}$

Donc : $M^2 - (a+d).M = \begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix} = (bc-ad).\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (bc-ad).I_2$.

2c) La précédente relation s'écrit : $M(M - (a+d)I) = (bc-ad)I_2$.

Si $bc - ad \neq 0$, alors $M \times \frac{1}{bc-ad} \cdot (M - (a+d)I) = I_2$, donc M est inversible dans ce cas là.

Réciproquement, si M est inversible, on a $bc-ad \neq 0$: en effet, dans le cas contraire, si M est inversible et que $bc-ad=0$, on aurait : $M^2-(a+d).M = 0.I_2$, donc $M^2-(a+d)M = O_2$, donc : $M(M-(a+d)I_2) = O_2$, donc $M^{-1}.M(M-(a+d)I_2) = M^{-1}.O_2$, donc $M-(a+d)I_2 = O_2$ donc $M=(a+d)I_2$, donc : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix}$, donc : $a=a+d$; $b=0$; $c=0$; $a+d=0$, donc $a=b=c=d=0$; absurde la matrice nulle n'est pas inversible.

Exercice III Conclusion : M inversible ssi $bc-ad \neq 0$.

① $U_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ avec d'après l'énoncé : $a_1 = a_0 - 0{,}2 \times a_0 + 0{,}1 \times b_0$

a)

$\underline{a_1} = 0{,}5 - 0{,}2 \times 0{,}5 + 0{,}1 \times 0{,}5 = 0{,}5 - 0{,}1 + 0{,}05 = \underline{0{,}45}$

et $b_1 = b_0 - 0{,}1 \times b_0 + 0{,}2 \times a_0$

$\underline{b_1} = 0{,}5 - 0{,}1 \times 0{,}5 + 0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}5 - 0{,}05 + 0{,}1 = \underline{0{,}55}$.

Ainsi, $\boxed{U_1 = \begin{pmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}55 \end{pmatrix}}$

b) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - \frac{20}{100} \times a_n + \frac{10}{100} \times b_n = 0{,}8a_n + 0{,}1b_n. \\ b_{n+1} = b_n - \frac{10}{100} \times b_n + \frac{20}{100} \times a_n = 0{,}2a_n + 0{,}9b_n. \end{cases}$

c) $M.U_n = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8a_n + 0{,}1b_n \\ 0{,}2a_n + 0{,}9b_n \end{pmatrix} \overset{\text{question précédente !}}{=} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$.

Ainsi, $\boxed{U_{n+1} = M.U_n}$.

d) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_n = M^n.U_0$.

On a : $U_3 = M^3.U_0$, donc : $\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{281}{500} & \frac{219}{1000} \\ \frac{219}{500} & \frac{781}{1000} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{281}{500} & \frac{219}{1000} \\ \frac{219}{500} & \frac{781}{1000} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

avec $M^3 = \begin{pmatrix} \frac{281}{500} & \frac{219}{1000} \\ \frac{219}{500} & \frac{781}{1000} \end{pmatrix}$ calculatrice

Ainsi : $\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{281}{500} \times 0{,}5 + \frac{219}{1000} \times 0{,}5 \\ \frac{219}{500} \times 0{,}5 + \frac{781}{1000} \times 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3905 \\ 0{,}6095 \end{pmatrix}$

Ainsi : $\begin{cases} a_3 = 0{,}3905 \\ b_3 = 0{,}6095 \end{cases}$: Au bout de 3 jours, il y aura environ 39% de souris dans le compartiment A et le reste (environ 61%) dans le compartiment B.

② $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

a) $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times1+1\times2 & 1\times1+1\times(-1) \\ 2\times1-1\times2 & 2\times1-1\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$

On a : $P \times P = 3I$, donc $P \times \frac{P}{3} = I$, donc P est inversible et la précédente relation montre que $\boxed{P^{-1}} = \frac{1}{3}P = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}$

b) $P^{-1}.M.P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{8}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$P^{-1}.M.P = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$P^{-1}.M.P = \frac{1}{30} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$P^{-1}MP = \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 14 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$P^{-1}.M.P = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{30} \end{pmatrix}$.

Donc $\underline{\underline{P^{-1}.M.P = D}}$ avec $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{30} \end{pmatrix}}$ qui est bien une matrice diagonale.

c) $\mathcal{P}(n)$: $M^n = P.D^n.P^{-1}$.

<u>Initialisation</u> : Pour $n=1$, <u>grâce à la question précédente</u>, $P^{-1}.M.P = D$, donc $\underline{P}P^{-1}MP = P.D$

$I.M.P = P.D$

$M.P = P.D$

Donc $M.P.P^{-1} = P.D.P^{-1}$

Donc $M.I = P.D.P^{-1}$

$\underline{M = P.D.P^{-1}}$.

Ainsi, $M = P.D.P^{-1} = P.D^1.P^{-1}$, donc $\mathcal{P}(1)$ vraie.

<u>Hérédité</u> : Soit n un entier non nul fixé tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à savoir que $M^n = P.D^n.P^{-1}$.

Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie c'est à dire prouvons que : $M^{n+1} = P.D^{n+1}.P^{-1}$.

Or, $M^{n+1} = \underline{M^n}.M \overset{\text{Hyp. réc.}}{=} \underline{(P.D^n.P^{-1})}.M = (P.D^n.P^{-1}).(P.D.P^{-1})$ car $M = P.D.P^{-1}$.

Donc $\underline{M^{n+1}} = P.D^n.(P^{-1}.P).D.P^{-1} = P.D^n.(I.D).P^{-1} = P.D^n.D.P^{-1} = \underline{P.D^{n+1}.P^{-1}}$.

Donc $\underline{\mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie}}$.

<u>Conclusion</u> : Initialisée et héréditaire, $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout entier $n \geq 1$.

$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ M^n = P.D^n.P^{-1}}}$

③ On sait que $U_n = M^n.U_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2\times 0{,}7^n & 1-0{,}7^n \\ 2-2\times 0{,}7^n & 2+0{,}7^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$U_n = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+2\times 0{,}7^n & 1-0{,}7^n \\ 2-2\times 0{,}7^n & 2+0{,}7^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1+2\times 0{,}7^n + 1-0{,}7^n \\ 2-2\times 0{,}7^n + 2+0{,}7^n \end{pmatrix}$

$U_n = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2+0{,}7^n \\ 4-0{,}7^n \end{pmatrix}$, ainsi, comme $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ on a : $\begin{cases} a_n = \frac{1}{6}(2+0{,}7^n) \\ b_n = \frac{1}{6}(4-0{,}7^n) \end{cases}$.

Or, $\underline{\underline{0 < 0{,}7 < 1}}$, donc $\underline{\underline{\lim_{n \to +\infty} 0{,}7^n = 0}}$. Par suite, $\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (<u>par somme et produit de limites</u>)

et de même, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

A long terme, $\frac{1}{3}$ des souris seront dans le compartiment A, et $\frac{2}{3}$ des souris dans le compartiment B.