Exercice I

1a) $z_B = 1+\sqrt{3}i$, donc $\boxed{|z_B|} = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \boxed{2}$

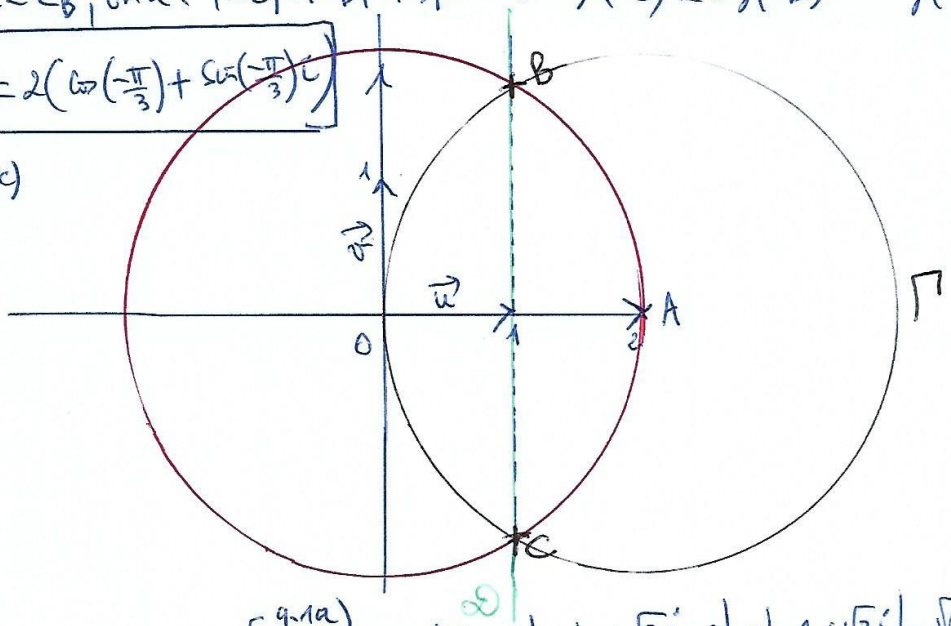
Soit θ un argument de z_B : $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{Re(z_B)}{|z_B|} = \dfrac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{I(z_B)}{|z_B|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ Donc $\boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$

Ainsi $\boxed{z_B = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)i\right)}$

Vu que $z_C = \overline{z_B}$, on a : $|z_C| = |\overline{z_B}| = |z_B| = 2$ et $\arg(z_C) = \arg(\overline{z_B}) = -\arg(z_B) = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

donc $\boxed{z_B = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)i\right)}$

1b) et 2b) et 3c)



2a) $z_B = 1+\sqrt{3}i$, donc $|z_B| \overset{(q.1a)}{=} 2$ et $|z_B - 2| = |1+\sqrt{3}i - 2| = |-1+\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2} = 2$

Donc $|z_B - 2| = |z_B|$, donc $\boxed{B \in \mathcal{D}}$.

$z_C = \overline{z_B}$, donc $|z_C - 2| = |\overline{z_B} - 2| = |\overline{z_B} - \overline{2}| = |\overline{z_B - 2}| = |z_B - 2| = |z_B| = |\overline{z_B}| = |z_C|$

Ainsi, $|z_C - 2| = |z_C|$, donc $\boxed{C \in \mathcal{D}}$.

$|z_A| = |2| = 2$ et $|z_A - 2| = |2-2| = 0$, donc $|z_A - 2| \neq |z_A|$, donc $\boxed{A \notin \mathcal{D}}$.

2b) Soit $M(z)$: $M(z) \in \mathcal{D} \iff |z| = |z-2| \iff |z_M| = |z_M - z_A| \iff OM = AM$

$M(z) \in \mathcal{D}$ équivaut à M équidistant de points O et A ce qui équivaut à M appartient à la médiatrice de $[OA]$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{D} \text{ est la médiatrice du segment } [OA].}$

3) $z \neq 2$ et $z' = \frac{-4}{z-2}$

a) $z_{B'} = \frac{-4}{z_B - 2} = \frac{-4}{1+\sqrt{3}i - 2} = \frac{-4}{-1+\sqrt{3}i} = \frac{-4(-1-\sqrt{3}i)}{(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)} = \frac{+4(1+\sqrt{3}i)}{(-1)^2+\sqrt{3}^2}$

$\boxed{z_{B'}} = \frac{4(1+\sqrt{3}i)}{4} = \boxed{1+\sqrt{3}i = z_B}$

$\boxed{z_{C'}} = \frac{-4}{z_C - 2} = \frac{-4}{\overline{z_B} - 2} = \frac{-4}{\overline{z_B - 2}} = \frac{-4}{\overline{z_B - 2}} = \overline{\left(\frac{-4}{z_B - 2}\right)} = \overline{z_{B'}} = \overline{z_B} = \boxed{1-\sqrt{3}i}$

Rq : $z_{C'} = z_C$

b) $z \neq 2$ et $z' = \frac{-4}{z-2}$

Donc $z' - 2 = \frac{-4}{z-2} - 2 = \frac{-4}{z-2} - \frac{2(z-2)}{z-2} = \frac{-4-2z+4}{z-2} = \frac{-2z}{z-2}$

Or deux nombres complexes égaux ont le même module, donc : $|z'-2| = \left|\frac{-2z}{z-2}\right| = \frac{|-2| \times |z|}{|z-2|}$

règles sur les modules.

Donc $\boxed{|z'-2| = \frac{2|z|}{|z-2|}}$

c) $M(z)$ et $M \in \mathcal{D}$: donc $|z-2| = |z|$, donc $\frac{|z|}{|z-2|} = 1$ (car $z \neq 2$ vu que $M \in \mathcal{D}$ et $A \notin \mathcal{D}$).

Par suite, d'après 3b) : $|z'-2| = 2 \times 1 = 2$, donc $|z_{M'} - z_A| = 2$, donc $AM' = 2$ et par suite M' appartient au cercle Γ de centre A et de rayon 2.

d) $B \in \mathcal{D}$ et $C \in \mathcal{D}$ d'après q. 2a). Or $B' = B$ et $C' = C$. (d'après q. 3a)

Donc d'après 3c), $B \in \Gamma$ et $C \in \Gamma$.

Exercice II

Exercice 2

$f(z) = z^2 + 2z + 3$.

1) $f(-1+\sqrt{3}i) = (-1+\sqrt{3}i)^2 + 2(-1+\sqrt{3}i) + 3$

$f(-1+\sqrt{3}i) = (-1)^2 + 2\times(-1)\times\sqrt{3}i + (\sqrt{3}i)^2 - 2 + 2\sqrt{3}i + 3$

$f(-1+\sqrt{3}i) = 1 - 2\sqrt{3}i + 3i^2 + 7 + 2\sqrt{3}i$ (avec $i^2 = -1$)

$\underline{f(-1+\sqrt{3}i)} = 1 - 3 + 7 = \underline{5}$

2a) $f(z) = 5 \iff z^2 + 2z + 3 = 5 \iff z^2 + 2z + 3 - 5 = 0 \iff z^2 + 2z + 4 = 0$.

On a une équation du 2° degré avec : $a = 1$; $b = 2$; $c = 4$.

$\underline{\Delta} = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times1\times4 = 4 - 16 = \underline{-12}$.

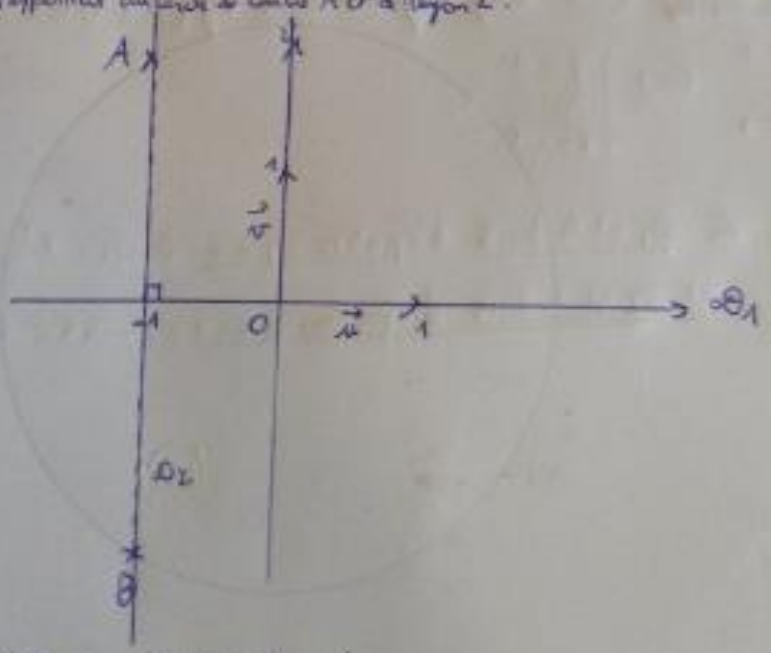
$\underline{\Delta < 0}$, donc $\underline{\text{dans } \mathbb{C}}$, cette équation a $\underline{\text{deux solutions}}$: $\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{|\Delta|}\,i}{2a} = \dfrac{-2 - \sqrt{12}\,i}{2} \overset{(*)}{=} -1 - \sqrt{3}i \\ z_2 = \overline{z_1} = -1 + \sqrt{3}i \end{cases}$

(*) $\sqrt{12} = \sqrt{4\times3} = \sqrt{4}\times\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ et $\dfrac{-2 - 2\sqrt{3}i}{2} = \dfrac{2(-1-\sqrt{3}i)}{2} = -1 - \sqrt{3}i$

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \{-1 - \sqrt{3}i\ ;\ -1 + \sqrt{3}i\}}$$

2b) A a pour affixe $z_A = -1 + \sqrt{3}i$ et $z_B = -1 - \sqrt{3}i$

Remarque : $|z_A| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ va permettre une construction rigoureuse des points A et B ;
$|z_A| = OA = 2$: A appartient au cercle de centre A et de rayon 2.



3) $(\Gamma) = \{M(z)$ tel que : $|f(z) - 8| = 3\}$.

$M(z) \in (\Gamma) \iff |f(z) - 8| = 3 \iff |z^2 + 2z + 3 - 8| = 3 \iff |z^2 + 2z + 1| = 3$

$M(z) \in (\Gamma) \iff |(z+1)^2| = 3$ car $z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$ (identité remarquable !).

Or, $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z^2| = |z|^2$:

$M(z) \in (F) \iff |z+1|^2 = 3 \iff |z+1| = \sqrt{3}$ car le module est positif.

$M(z) \in (F) \iff |z-(-1)| = \sqrt{3} \iff |z_M - z_\Omega| = \sqrt{3}$ où $\begin{cases} M(z) \text{ et } \Omega(-1;0) \\ z_\Omega = -1 \end{cases}$

$M(z) \in (F) \iff \Omega M = \sqrt{3} \iff$ M appartient au cercle de centre Ω et de rayon $R = \sqrt{3}$; $|z_M - z_\Omega| = \Omega M$.

Donc $\boxed{(F) \text{ est le cercle de centre } \Omega(-1;0) \text{ et de rayon } R = \sqrt{3}}$

4) $z = x + yi$ avec x, y réels.

a) $f(z) = f(x+yi) = (x+yi)^2 + 2(x+yi) + 9$

$f(z) = x^2 + 2xyi + (yi)^2 + 2x + 2yi + 9$

$f(z) = x^2 + 2xyi + y^2 i^2 + 2x + 2yi + 9$

$f(z) = x^2 + 2xyi - y^2 + 2x + 2yi + 9$ (car $i^2 = -1$).

$\boxed{f(z) = x^2 - y^2 + 2x + 9 + (2xy + 2y)i}$

b) $f(z) \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(f(z)) = 0 \iff 2xy + 2y = 0 \iff 2y(x+1) = 0$

$f(z) \in \mathbb{R} \iff \left| \begin{array}{l} 2y = 0 \\ \text{ou} \\ x+1 = 0 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} y = 0 \\ \text{ou} \\ x = -1 \end{array} \right.$

Ainsi, $(E) = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, où $\mathcal{D}_1$ est la droite d'équation : $y = 0$ (c'est-à-dire l'axe des abscisses).

et $\mathcal{D}_2$ est la droite d'équation : $x = -1$ (parallèle à l'axe des ordonnées)

Partie B

$M(z)$ avec $z \neq 0$ et $M'(z')$ avec $z' = \frac{4}{\bar{z}}$. $z_{\overrightarrow{OM}} = z_M - z_O = z - 0 = z$

1) $z_{\overrightarrow{OM'}} = z_{M'} - z_O = \frac{4}{\bar{z}} - 0 = \frac{4}{\bar{z}} = \frac{4z}{z\bar{z}} = \frac{4}{|z|^2} \times z = \frac{4}{|z|^2} \times z_{\overrightarrow{OM}}$

donc $\boxed{\overrightarrow{OM'} = \frac{4}{|z|^2}\overrightarrow{OM}}$ avec $\frac{4}{|z|^2} \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires et ont le point O en commun, donc $\boxed{O, M \text{ et } M' \text{ sont alignés}}$.

2) M et M' sont confondus équivaut à $z_M = z_{M'}$ c'est à dire à : $z = \frac{4}{\bar{z}}$ c'est à dire à :

$z\bar{z} = 4$ (et $z \neq 0$) ou encore à $|z|^2 = 4$, et donc, par positivité du module à

$|z| = 2$ c'est à dire $OM = 2$: c'est donc $\boxed{\text{le cercle de centre O et de rayon 2}}$.

Exercice III

a) $z_P = 1+i$

$z_{P'} = f(z_P) = f(1+i) = \frac{\overline{1+i}\,(1+i-2)}{\overline{1+i} - 2} = \frac{(1-i)(-1+i)}{1-i-2} = \frac{(1-i)(-1+i)}{(-1-i)}$

$\boxed{z_{P'}} = \frac{-1+i+i-i^2}{-1-i} = \frac{-2i}{(1+i)} = \frac{-2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i+2i^2}{1^2+1^2} = \frac{-2-2i}{2} = \boxed{-1-i}$

b) $z_{\overrightarrow{AP}} = z_P - z_A = 1+i-2 = -1+i$ et $z_{\overrightarrow{BP'}} = z_{P'} - z_B = -1-i-(-2) = 1-i$

Ainsi, $z_{\overrightarrow{BP'}} = -z_{\overrightarrow{AP}}$, donc $\overrightarrow{BP'} = -\overrightarrow{AP}$: les droites $\boxed{(BP') \text{ et } (AP) \text{ sont donc parallèles}}$

vu que deux vecteurs colinéaires "portent" des droites parallèles.