TSspé — Corrigé du DS3 — Janvier 2017

Exercice II

Partie A

(E) : $51x - 26y = 1$. $(x, y \in \mathbb{Z})$.

① $PGCD(51;-26) = PGCD(51;26) = PGCD(51-26;26) = PGCD(25;26) = PGCD(26-25;25)$

$PGCD(51;26) = PGCD(1;25) = 1$: 51 et −26 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Bézout, il existe au moins un couple $(x;y)$ d'entiers tels que : $51x - 26y = 1$ $(= PGCD(51;-26))$.

②a Pour $x_0 = -1$ et $y_0 = -2$, on a : $51x_0 - 26y_0 = 51\times(-1) - 26\times(-2) = -51 + 52 = 1$.

donc $(x_0;y_0) = (-1;-2)$ est un couple solution de (E).

②b $(x;y)$ solution de (E) ssi $51x - 26y = 1$ ssi $51x - 26y = 51x_0 - 26y_0$

ssi $51(x - x_0) = 26(y - y_0)$

($x - x_0 \in \mathbb{Z}$; $y - y_0 \in \mathbb{Z}$ car y et $y_0 \in \mathbb{Z}$).

Donc $26 \mid 51(x - x_0)$.

et $PGCD(26;51) = 1$

Donc d'après le théorème de Gauss, $26 \mid x - x_0$: il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x - x_0 = 26k$, donc $x = 26k + x_0 = 26k - 1$. (car $x_0 = -1$).

Par suite, $51 \times 26k = 26(y - y_0)$, donc $y - y_0 = 51k$ et $y = 51k + y_0 = 51k - 2$. (car $y_0 = -2$).

Ainsi, $\mathcal{S}_{(E)} \subset \{(26k-1;\ 51k-2),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Réciproquement : Soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrons que $(26k-1;\ 51k-2)$ est solution de (E) :

On a $51(26k-1) - 26(51k-2) = 51\times26k - 51 - 26\times51k + 26\times2 = -51 + 52 = 1$.

donc, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $(26k-1;\ 51k-2)$ est solution de (E).

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_{(E)} = \{(26k-1;\ 51k-2),\ k \in \mathbb{Z}\}}$.

Partie B

$0 \leqslant x \leqslant 25$ $\quad f(x) = y$ où y est le reste de la D.E de $51x + 2$ par 26.

① Ne convient à l'entier $x = 13$. On a $51\times13 + 2 = 665$ et

665	26
145	25
15	

donc $y = 15$

ce qui correspond à la lettre P.

La lettre N est donc, par ce processus, codée en la lettre P.

② $51a \equiv 1(26) \iff 26 \mid 51a - 1 \iff \exists \lambda \in \mathbb{Z}$ tq $51a - 1 = 26\lambda \iff \exists \lambda \in \mathbb{Z}$ tq $51a - 26\lambda = 1$

$\iff (a;\lambda)$ solution de (E) où (E) : $51x - 26y = 1$.

Grâce à la partie Ⓐ, $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $a = 26k - 1$.

Or ici, $0 \leqslant a \leqslant 25$ ssi $0 \leqslant 26k - 1 \leqslant 25$ ssi $1 \leqslant 26k \leqslant 26$ ssi $\frac{1}{26} \leqslant k \leqslant 1$ (car $26 > 0$).

Donc comme $k \in \mathbb{Z}$ et que $\frac{1}{26} \leqslant k \leqslant 1$, on a : $k = 1$, et par suite, $a = 26 \times 1 - 1 = 25$.

L'entier a tel que : $0 \leqslant a \leqslant 25$ et $51a \equiv 1(26)$ est donc $a = 25$.

③ y est le reste de la D.E de $51x + 2$ par 26, donc $y \equiv 51x + 2 \ (26)$.

Par suite, par compatibilité de la relation de congruence avec le produit, on a, en multipliant chacun des membres par a où a est l'entier de la question ② ($a = 25$) :

$ay \equiv 51ax + 2a \ (26)$.

Donc $ay \equiv 1x + 2 \times 25 \ (26)$ car $51a \equiv 1(26)$ d'après ②.

Donc $ay \equiv x + 50 \ (26)$ Or $50 \equiv -2(26)$ car $52 = 2 \times 26$!

Donc $ay \equiv x - 2(26)$, donc $\boxed{x \equiv ay + 2 \ (26)}$. (donc $x \equiv 25y + 2 \ (26)$)

De plus, $0 \leqslant x \leqslant 25$, donc x est le reste de la D.E de $ay + 2$ par 26.

Ne perdons de vue que $a = 25$ pour la suite.

④ N correspond à l'entier $y = 13$.

Or $x \equiv 25y + 2 \ (26)$ et $y = 13$.

Donc $x \equiv 25 \times 13 + 2 \ (26)$

$x \equiv 327 \ (26)$

$327 = 26 \times 12 + 15$

Donc $x \equiv 15 \ (26)$, donc $x = 15$

car $0 \leqslant x \leqslant 25$ et $x \equiv 15(26)$.

et à $x = 15$ correspond la lettre P.

La lettre $\boxed{\text{P est donc codée par la lettre N}}$.

⑤ Grâce aux questions précédentes (① et ④) on a : $f(13) = 15$ et $f(15) = 13$

Donc $f(f(13)) = 13$.

Ceci donne l'intuition suivante : $f(f(x)) = x$ pour toute valeur x telle que $0 \leq x \leq 25$ et x entier.

Montrons que $f(f(x)) = x$: (pour tout entier $x \leq 25$)

On $f(x) = y$ avec $y \equiv 51x + 2 \ (26)$ et $0 \leq y \leq 25$.

Donc $f(f(x)) = f(y)$ → $f(y)$ est donc le reste de la division euclidienne de $51y + 2$ par 26.

avec $f(y) \equiv 51y + 2 \ (26)$ et $0 \leq f(y) \leq 25$.

$$f(f(x)) = f(y) \equiv 51y + 2 \ (26) \text{ et } 0 \leq f(y) \leq 25.$$

$$f(f(x)) = f(y) \equiv 51(51x + 2) + 2 \ (26) \text{ et } 0 \leq f(y) \leq 25. \quad (y \equiv 51x + 2 \ (26))$$

$$f(f(x)) = f(y) \equiv 51^2 x + 102 + 2 \ (26) \text{ et } 0 \leq f(y) \leq 25.$$

$$f(f(x)) = f(y) \equiv 51^2 x + 104 \ (26) \text{ et } 0 \leq f(y) \leq 25.$$

On $104 = 26 \times 4$, donc $104 \equiv 0 \ (26)$

et $51^2 = (52 - 1)^2 = 52^2 - 2 \times 52 + 1 \equiv 1 \ (26)$ car $52 \equiv 0 \ (26)$.

Donc $f(f(x)) = f(y) \equiv 1x \ (26)$ et $0 \leq f(y) \leq 25$.

Donc $x \equiv f(y) \ (26)$ et $\begin{cases} 0 \leq f(y) \leq 25 \\ 0 \leq x \leq 25 \end{cases}$

Par suite, $x = f(y)$ (en effet, $26 \mid x - f(y)$ et $-25 \leq x - f(y) \leq 25$, donc $x - f(y) = 0$ qui est le seul multiple de 26 compris entre -25 et 25).

Donc $x = f(f(x))$ (en $y = f(x)$!) pour tout entier x tel que : $0 \leq x \leq 25$.

En composant un nombre pair de fois, et partant de x, on obtiendra à l'arrivée x, le nombre entier que celui de départ. (dans l'absolu, c'est un raisonnement par récurrence qu'il faudrait ici faire !)

100 est pair, donc en appliquant 100 fois cette fonction de codage à un nombre x compris entre 0 et 25, on obtiendra x.

Un tel codage est dit involutif (i.e $f(f(x)) = x$ pour tout entier x compris entre 0 et 25).

Donc en appliquant 100 fois consécutivement ce procédé à une lettre quelconque de l'alphabet, on retombe sur cette lettre choisie.

Exercice 1

① Soit a et b des entiers relatifs :

*) Enoncé du théorème de Bézout :
a et b sont premiers entre-eux si et seulement si il existe des entiers relatifs u et v tels que : $au + bv = 1$

**) Soit a, b, c des entiers relatifs.

Si $a \mid bc$ et si a et b sont premiers entre-eux, alors $a \mid c$: Enoncé du théorème de Gauss.

② On suppose que : $\begin{cases} a \mid bc \\ \text{et } \text{PGCD}(a;b) = 1. \end{cases}$ Grâce au théorème de Bezout, il existe donc des entiers relatifs u et v tels que : $au + bv = 1$.

Donc : $c(au+bv) = c$, donc $acu + bcv = c$

Or, $a \mid bc$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $bc = ka$.

Par suite, on a : $acu + kav = c$

Donc $a(\underbrace{cu + kv}_{\in \mathbb{Z} \text{ car } c,u,k,v \in \mathbb{Z}}) = c$

Donc $\boxed{a \mid c}$ ∎

③ $\frac{n-12}{5} \in \mathbb{Z} \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\frac{n-12}{5} = k \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que : $n = 5k + 12$.

$\frac{n+7}{10} \in \mathbb{Z} \iff \exists \ell \in \mathbb{Z}$ tel que : $\frac{n+7}{10} = \ell \iff \exists \ell \in \mathbb{Z}$ tel que : $n = 10\ell - 7$.

Par suite, $\frac{n-12}{5} \in \mathbb{Z}$ et $\frac{n+7}{10} \in \mathbb{Z} \iff \exists (k;\ell) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $n = 5k + 12 = 10\ell - 7$

$\iff \exists (k;\ell) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $5k - 10\ell = -7 - 12 = -19$

$\iff \exists (k;\ell) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $5(\underbrace{k - 2\ell}_{\in \mathbb{Z} \text{ car } k,\ell \in \mathbb{Z}!}) = -19$

$\Rightarrow 5 \mid 19$: absurde !

Ainsi il n'existe aucun entier relatif n tel que $\frac{n-12}{5}$ et $\frac{n+7}{10}$ soient simultanément entiers !