Exercice 1

a) $5^2 = 25$ et $25+1=26$. Or $13 \mid 26$, donc* $5^2+1 \equiv 0\,[13]$ et $5^2 \equiv -1\,[13]$

(* car $26 \equiv 0\,[13]$).

b) $\forall m \in \mathbb{N}$, $5^{4m} = (5^2)^{2m}$.

D'après q.a), $5^2 \equiv -1\,[13]$, donc par c.c.A.P, on a :

$(5^2)^{2m} \equiv (-1)^{2m}\,[13]$. Or $(-1)^{2m} = ((-1)^2)^m = 1^m = 1$, donc

$5^{4m} \equiv 1\,[13]$ et par c.c.A.S, $5^{4m} - 1 \equiv 0\,[13]$ ce qui signifie que $5^{4m}-1$ est divisible par 13.

Exercice 2

1) Soit n un entier relatif.

Compléter le tableau suivant de congruences modulo 8 à l'aide de chiffres (les plus petits possibles) :

$n \equiv$ ... [8]	0	1	2	3	4	5	6	7
$n^2 \equiv$ ... [8]	0	1	4	1	0	1	4	1

2) A l'aide de la question 1), compléter alors, pour tous entiers n et m, le tableau ci-dessous de congruences modulo 8, de l'entier $n^2 + m^2$:

$m^2 \ldots \equiv [8]$ \ $n^2 \ldots \equiv [8]$	0	1	4
0	0	1	4
1	1	2	5
4	4	5	0

3) Par l'absurde, supposons que $2023 \underset{(*)}{=} n^2 + m^2$, où n et m sont des entiers.

Raisonnons modulo 8 : $\begin{array}{r|l} 2023 & 8 \\ 7 & 252 \end{array}$, donc $2023 \equiv 7\,[8]$.

D'après (*), on aurait : $2023 \equiv n^2 + m^2\,[8]$, donc par transitivité de $\equiv$: $n^2 + m^2 \equiv 7\,[8]$. (**)

Or d'après q.2) pour tous entiers n et m, $n^2 + m^2 \equiv \left| \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{array} \right.\,[8]$, donc $n^2 + m^2$ n'est jamais congru à 7 modulo 8 (***).

Ainsi (**) et (***) constituent une contradiction.

Donc il est impossible d'écrire 2023 comme somme de deux carrés d'entiers.

Exercice 3

i) $7|a$, donc $a \equiv 0\,[7]$.
$7|b$, donc $b \equiv 0\,[7]$.

Si $a \equiv 0\,[7]$, alors $a^2 \equiv 0^2\,[7]$ c.c.A.P, donc $a^2 \equiv 0\,[7]$.
de même, si $b \equiv 0\,[7]$, alors $b^2 \equiv 0\,[7]$.
Par c.c.A.S, on a : $a^2+b^2 \equiv 0+0\,[7]$, donc $a^2+b^2 \equiv 0\,[7]$, donc 7 divise a^2+b^2.

ii) Faisons une table de congruences :

$a \equiv (7)$	0	1	2	3	4	5	6
$a^2 \equiv (7)$	0	1	4	2	2	4	1

Pour tous entiers relatifs a et b on a : $a^2 \equiv 0\,[7]$ ou $a^2 \equiv 1\,[7]$ ou $a^2 \equiv 2\,[7]$ ou $a^2 \equiv 4\,[7]$. Idem avec b^2.

Par suite :

$b^2 \equiv [7]$ \ $a^2 \equiv (7)$	0	1	2	4
0	0	1	2	4
1	1	2	3	5
2	2	3	4	6
4	4	5	6	1

Tableau de congruence de a^2+b^2 modulo 7.

Ainsi, $a^2+b^2 \equiv 0;1;2;3;4;5;6\,[7]$.
Or $7|(a^2+b^2)$, donc $a^2+b^2 \equiv 0\,[7]$.
Par suite, grâce au tableau $a^2+b^2 \equiv 0\,(7)$ si $a^2 \equiv 0\,[7]$ et $b^2 \equiv 0\,(7)$ donc d'après le premier tableau si $a \equiv 0\,(7)$ et $b \equiv 0\,(7)$
c'est à dire si $7|a$ et $7|b$.
Ainsi, si $7|(a^2+b^2)$, alors $(7|a$ et $7|b)$.

Ainsi : $(7|a^2+b^2) \Rightarrow (7|a$ ou $7|b)$.

iii) Par double implication, on a établi que :

$$(7|a^2+b^2) \Leftrightarrow (7|a \text{ ou } 7|b).$$