Maths Expertes Groupe 1 — Corrigé du contrôle 2 — 10/10/2023

Exercice I

a) $15 = 1\times 15$; $15 = 3\times 5$.

b) $x\in\mathbb{N}$; $y\in\mathbb{N}$. $4x^2 - y^2 = 15$ équivaut à : $(2x+y)(2x-y) = 15$. $(*)$

Observons que $2x+y \geq 2x-y$ vu que $y\in\mathbb{N}$.

Si $(x;y)$ est solution de $(*)$: alors de par la question a) et l'observation précédente, on a :

$\begin{cases} 2x+y = 15 \\ 2x-y = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x+y = 5 \\ 2x-y = 3 \end{cases}$ ($2x+y$ et $2x-y$ sont des diviseurs de 15 avec $2x+y \geq 2x-y$).

Donc $\begin{cases} 4x = 16 \\ y = 2x-1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 4x = 8 \\ y = 2x-3 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 2 \\ y = +1 \end{cases}$

Réciproquement : $(4;7)$ est solution de $(*)$ car $(2\times 4+7)(2\times 4-7) = (8+7)(8-7) = 15\times 1 = 15$

et de même $(2;+1)$ est solution de $(*)$ car : $(2\times 2+1)(2\times 2-1) = 5\times 3 = 15$.

Donc $\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{N}^2} = \{(4;7);(2;1)\}}$.

Exercice II

1a) Si un entier, appelons le n est multiple de 4, alors $n = 4k$ avec k entier.

$\boxed{n} = 2\times 2k = \boxed{2\lambda}$ avec $\lambda = 2k$, entier.

Donc $\boxed{n \text{ est pair}}$.

1b) La contraposée d'abord : « Si un entier n'est pas pair, alors cet entier n'est pas multiple de 4 »

ou encore : « Si un entier est impair, alors cet entier n'est pas multiple de 4 ».

La réciproque de la contraposée : « Si un entier n'est pas multiple de 4, alors cet entier est IMPAIR »

Cette dernière est bien évidemment fausse, en témoigne le contre-exemple : 2.

2) C'est faux : prenons pour contre-exemple : $a = 8$; $b = 6$ et $c = 12$.

$ab = 48$ et $12 | 48$, pour autant 12 ne divise ni 8 ni 6 !

3) L'énoncé de la contraposée est : « Si n est pair, alors n^3 est pair ».

Supposons n pair : alors $n = 2k$ avec k entier.

alors $n^3 = (2k)^3 = 8k^3 = 2 \times 4k^3 = 2l$ où $l = 4k^3$ est entier car $\mathbb{Z}$ stable par produit.

Ainsi n^3 est pair.

Par suite, la contraposée de cette proposition est vraie, donc cette proposition est vraie : « Si n^3 est impair, alors n est impair » est donc vraie.

4) i) $\boxed{(3;4;5)}$ car $3^2+4^2 = 16+9 = 25 = 5^2$.

ii) Par l'absurde, supposons qu'il existe des entiers a, b et c tous IMPAIRS tels que :

$a^2+b^2=c^2$.

On sait que le carré d'un entier impair est impair, donc a^2, b^2 et c^2 seraient impairs.

Or la somme de deux entiers pairs est paire. Alors a^2+b^2 serait pair et comme $a^2+b^2=c^2$, on aurait c^2 pair, donc c^2 serait à la fois impair et pair

ce qui est absurde !

$\boxed{\text{Ainsi il n'existe pas de triplets Pythagoricien formé de trois entiers impairs.}}$

iii) Par ii) il ne peut pas y avoir trois entiers impairs dans un tel triplet.

Montrons qu'il est également impossible d'en avoir un seul impair :

En isolant dans la relation l'entier impair, il apparaîtrait comme somme ou différence des carrés de deux entiers pairs, donc serait pair (*) : absurde.

Donc impossible d'avoir un seul nombre impair dans ce triplet.

Ainsi, il n'est pas possible de constituer un tel triplet formé d'un nombre IMPAIR d'entiers impairs.

(*) On s'appuie ici sur : " Pair + Pair → Pair " et " Pair − Pair → Pair ".

Ceci, peut par les perfectionnistes se démontrer : $2k+2l = 2(k+l)$ ----

Exercice III

$a \in \mathbb{N}^*$; $b \in \mathbb{N}^*$, et $a+b=434$ (*)

a	b
r	4

avec r chiffre pair.

On a : $a = 4b + r$ et $r \in \{0;2;4;6;8\}$. (**)

Grâce à (*) : $a = 434 - b$

Donc grâce à (**) : $434 - b = 4b + r$ avec toujours $r \in \{0;2;4;6;8\}$.

$$\underbrace{5b}_{\text{multiple de 5.}} = 434 - r$$

donc $434 - r$ est un multiple de 5.

Si $r=0$: $434 - r = 434$: non multiple de 5.

Si $r=2$: $434 - 2 = 432$: " ———— ".

Si $r=4$: $434 - 4 = 430$ qui est multiple de 5.

On peut vérifier que $r=6$ et $r=8$ ne conviennent pas, mais c'est inutile par unicité du reste.

donc $\boxed{r=4}$ et par suite : $5b = 434 - 4 = 430$, donc $\boxed{b} = \frac{430}{5} = \boxed{86}$

Enfin : $\boxed{a} = 434 - b = 434 - 86 = \boxed{348}$.