TS spé — Corrigé du DM7 — Mars 2017

Exercice I $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\times(-4)+6\times(-3) & -4\times 6+6\times 5 \\ -4\times(-3)+5\times(-3) & -3\times 6+5\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$

donc comme $A + 2I = \begin{pmatrix} -4+2 & 6 \\ -3 & 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$, on a bien : $\underline{A^2 = A + 2I}$

2) $A^3 = A^2 \times A \overset{\text{car } A^2 = A+2I}{=} (A+2I)\times A = A\times A + 2I\times A = A^2 + 2A \underset{\text{car } A^2=A+2I}{=} A + 2I + 2A = 3A + 2I$.

Donc $\underline{A^3 = 3A + 2I}$.

$\underline{A^4} = A^3 \times A = (3A+2I)\times A = 3A^2 + 2I\times A = 3(A+2I) + 2A = \underline{5A + 6I}$.

3) $r_0 = 0$; $s_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} r_{n+1} = r_n + s_n \\ s_{n+1} = 2r_n \end{cases}$.

On procède par récurrence sur n : Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $A^n = r_n A + s_n I$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $A^0 = I$ et $r_0 A + s_0 I = 0A + 1I = I$, donc $A^0 = r_0 A + s_0 I$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel fixé. On suppose que $\mathcal{P}(k)$ vraie, à savoir que $A^k = r_k A + s_k I$.

Or $A^{k+1} = A^k \times A \overset{H.R}{=} (r_k A + s_k I)\times A = r_k A^2 + s_k \times I \times A$

$A^{k+1} \underset{\text{car } A^2 = A+2I\ (q1)}{=} r_k \times (A+2I) + s_k \times A = r_k \times A + s_k \times A + 2r_k I$

$A^{k+1} = (r_k + s_k).A + 2r_k.A$. De plus, par définition des suites (r_n) et (s_n) on a :

$r_k + s_k = r_{k+1}$ et $s_{k+1} = 2r_k$.

Donc $A^{k+1} = r_{k+1}.A + s_{k+1}.A$: $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = r_k A + s_k I$.

4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{k_{n+1}} = r_{n+1} - s_{n+1} = r_n + s_n - 2r_n = -r_n + s_n = -1(r_n - s_n) = \boxed{-k_n}$

Ainsi, (k_n) est géométrique de raison $Q = -1$.

Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}$, $k_n = k_0 \times Q^n$ avec $k_0 = r_0 - s_0 = 0 - 1 = -1$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $h_n = -1 \times (-1)^n = (-1)^{n+1}$.

(5) $t_n = r_n + \frac{(-1)^n}{3}$ est géo. de raison $\tilde{Q} = 2$

$t_0 = r_0 + \frac{(-1)^0}{3} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{t_n} = t_0 \times \tilde{Q}^n = \frac{1}{3} \times 2^n = \boxed{\frac{2^n}{3}}$

(6) Grâce à (5) : $t_n = r_n + \frac{(-1)^n}{3} = \frac{2^n}{3}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n = \frac{2^n}{3} - \frac{(-1)^n}{3}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ r_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}}$$

Grâce à (4) : $r_n - s_n = h_n = (-1)^{n+1}$.

Donc $s_n = r_n - (-1)^{n+1} = r_n + (-1) \times (-1)^{n+1} = r_n + (-1)^{n+2} = r_n + (-1)^n$

car $(-1)^{n+2} = (-1)^n \times \underbrace{(-1)^2}_{=1}$

Donc grâce à (6) : $s_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} + (-1)^n$

$$\boxed{s_n} = \frac{2^n - (-1)^n + 3\times(-1)^n}{3} = \boxed{\frac{2^n + 2\times(-1)^n}{3}}$$

(7) $A^n = r_n A + s_n I = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \frac{2^n + 2\times(-1)^n}{3} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{-4\times 2^n - 4\times(-1)^{n+1} + 2^n + 2\times(-1)^n}{3} & \frac{2^n \times 6 + (-1)^{n+1}\times 6}{3} \\ \frac{2^n \times(-3) + (-1)^{n+1}\times(-3)}{3} & \frac{2^n \times 5 + (-1)^{n+1}\times 5 + 2^n + 2\times(-1)^n}{3} \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{-4(2^n + (-1)^{n+1}) + 2^n + 2\times(-1)^n}{3} & \frac{6\times(2^n + (-1)^{n+1})}{3} \\ \frac{-3(2^n + (-1)^{n+1})}{3} & \frac{2^n \times(5+1) + (-1)^n \times(-5+2)}{3} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} -2^n + 2\times(-1)^n & 2^{n+1} - 2\times(-1)^n \\ -2^n + (-1)^n & 2^{n+1} + (-1)^{n+1} \end{pmatrix}}.$$

Exercice II

Partie A 1a) $n, N \geq 2$ avec $n^2 \equiv N-1 \ (N)$

$n \times n^3 = n^4 = (n^2)^2$, or $n^2 \equiv N-1 (N)$, donc $(n^2)^2 \equiv (N-1)^2 (N)$ par compatibilité de $\equiv$ avec les puissances.

Donc $n^4 \equiv N^2 - 2N + 1 \ (N)$.

Or $N \equiv 0 (N)$, donc $N^2 \equiv 0^2 (N)$ et $-2N \equiv -2 \times 0 \ (N)$

Donc $N^2 - 2N \equiv 0 (N)$, donc $N^2 - 2N + 1 \equiv 1 (N)$

Par suite, $n^4 \equiv 1 (N)$, donc : $n \times n^3 \equiv 1 \ (N)$

1b) De façon triviale, $5^2 = 25$ et $25 \equiv 26-1 \ (26)$.

On pose $n = 5$ et $N = 26$: on a $5^2 \equiv 26-1 (26)$, donc grâce à (1a), $n \times n^3 \equiv 1 \ (26)$, donc

$5 \times 5^3 \equiv 1 (26)$: On pose $k_1 = 5^3 = 125$: on a $5 k_1 \equiv 1 (26)$.

2) a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, donc $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times4+1\times3 & 4\times1+1\times2 \\ 4\times3+2\times3 & 3\times1+2\times2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 18 & 7 \end{pmatrix}$

$6A = \begin{pmatrix} 24 & 6 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}$, donc $6A - A^2 = \begin{pmatrix} 24-19 & 6-6 \\ 18-18 & 12-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5.I$.

$6A - A^2 = 5.I$

b) Grâce à 2a) : $\frac{1}{5}.(6A - A^2) = I$, donc $\frac{1}{5}.A(6I - A) = I$

Donc $A.\left(\frac{1}{5}(6I - A)\right) = I$ ce qui suffit à prouver que A est inversible d'inverse

$A^{-1} = \frac{1}{5}.(6I - A) = \frac{6}{5}I + (-\frac{1}{5})A = \alpha I + \beta A$ avec : $\alpha = \frac{6}{5}$ et $\beta = -\frac{1}{5}$.

c) $5A^{-1} = 5 \times \frac{1}{5}.(6I - A) = 6I - A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = B$.

Ainsi on a bien : $B = 5A^{-1}$.

d) Si $AX = Y$, alors comme A est inversible, on a : $A^{-1}(AX) = A^{-1}Y$

donc $(A^{-1}.A).X = A^{-1}.Y$

$I.X = A^{-1}Y$, donc $X = A^{-1}.Y$, donc $5X = 5A^{-1}.Y$

Vu que $B = 5A^{-1}$, on a donc : $5X = BY$.

Partie B : procédure de codage

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

« ET » est codé par la matrice $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \end{pmatrix}$.

Puis $Y = AX = \begin{pmatrix} 35 \\ 50 \end{pmatrix}$, puis $R = \begin{pmatrix} 9 \\ 24 \end{pmatrix}$ et d'après le tableau « ET » est codé « JY ».

Partie C : procédure de décodage

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.

1. On a $Y = AX \iff A^{-1}Y = X \iff 5A^{-1}Y = 5X = BY$ soit $Y = AX \iff$ $\left\{\begin{array}{rcl} 5x_1 & = & 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 & = & -3y_1 + 4y_2 \end{array}\right.$
2. La question 1. b. de la **partie A** a montré que $5 \times 21 \equiv 1 \quad \text{modulo } 26$. Donc en reprenant le système de la question précédente et en multipliant par 21, on obtient :
$\left\{\begin{array}{rcl} 21 \times 5x_1 & = & 21 \times (2y_1 - y_2) \\ 21 \times 5x_2 & = & 21 \times (-3y_1 + 4y_2) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 21 \times 5x_1 & = & 42y_1 - 21y_2 \\ 21 \times 5x_2 & = & -63y_1 + 84y_2 \end{array}\right. \iff$
$\left\{\begin{array}{rcll} x_1 & \equiv & 16y_1 + 5y_2 & \text{modulo } 26 \\ x_2 & \equiv & 15y_1 + 6y_2 & \text{modulo } 26 \end{array}\right.$
3. « QP » est associé à la matrice $\begin{pmatrix} 16 \\ 15 \end{pmatrix}$.

   En utilisant le résultat précédent :
$\left\{\begin{array}{rcll} x_1 & \equiv & 16y_1 + 5y_2 & \text{modulo } 26 \\ x_2 & \equiv & 15y_1 + 6y_2 & \text{modulo } 26 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x_1 & \equiv & 256 + 75 & \text{modulo } 26 \\ x_2 & \equiv & 240 + 90 & \text{modulo } 26 \end{array}\right. \iff$
$\left\{\begin{array}{rcll} x_1 & \equiv & 331 & \text{modulo } 26 \\ x_2 & \equiv & 330 & \text{modulo } 26 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 19 \\ x_2 & = & 18 \end{array}\right.$
   Le mot décodé est donc « TS ».

Exercice III

1. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$MX_n = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 3 \\ -\frac{35}{2} & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2}x_n + 3y_n \\ -\frac{35}{2}x_n + 8y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

   b. La suite (X_n) est géométrique de raison M et de premier terme M_0, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$M_n = M^n X_0.$$

2. **a.** On a, à l'aide de la calculatrice :

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 3 \\ -\frac{15}{2} & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   b. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}$.

   c. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $M^n = PD^nP^{-1}$.

   — **Initialisation.** On a $M^0 = I_3$ (où I_3 est la matrice identité d'ordre 3), et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

   — **Hérédité.** Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque on ait $M^n = PD^nP^{-1}$, on doit alors montrer que $M^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.
   On a

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M \\ &= PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} \\ &= PD^n \times P^{-1}P \times DP^{-1} \\ &= PD^nP^{-1} \end{aligned}$$

   ce qu'il fallait démontrer.

— **Conclusion.** La relation est vraie au rang 0 et pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque $M^n = PD^nP^{-1}$ entraîne $M^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$, donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier n, on a $M^n = PD^nP^{-1}$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{array}{rcl} X_n & = & M^n X_0 \\ & = & \begin{pmatrix} -14+\frac{15}{2^n} & 6-\frac{6}{2^n} \\ -35+\frac{35}{2^n} & 15-\frac{14}{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} -14+\frac{15}{2^n}+12-\frac{12}{2^n} \\ -35+\frac{35}{2^n}+30-\frac{28}{2^n} \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} -2+\frac{3}{2^n} \\ -5+\frac{7}{2^n} \end{pmatrix} \end{array}$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = -2+\frac{3}{2^n}$ et $y_n = -5+\frac{7}{2^n}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $A_n\left(-2+\frac{3}{2^n}\ ;\ -5+\frac{7}{2^n}\right)$ et

$$7\left(-2+\frac{3}{2^n}\right)-3\left(-5+\frac{7}{2^n}\right)-1 = -14+\frac{21}{2^n}+15-\frac{21}{2^n}-1 = -15+15 = 0$$

ce qui prouve bien que $A_n \in \mathscr{D}$.