Exercice I

48) $P_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ donc $P_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$.

or $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}2a_n + 0{,}4b_n \\ b_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}6b_n \end{cases}$ s'écrit matriciellement : $P_{n+1} = AP_n$, où $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}}$

Ainsi, $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = AP_n}$ avec $\boxed{P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}}$

55a) (S) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y - 2z = 2 \\ 4x - y + 2z = 8 \end{cases}$. Posons : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

et $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

(S) s'écrit matriciellement sous la forme : $\boxed{AX = B}$.

A l'aide de sa machine, on vérifie que A est inversible et que A^{-1} = horrible...

Donc de $AX = B$, on tire en prémultipliant à gauche par A^{-1} :

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

D'où $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$. $\boxed{\mathcal{S} = \{(1;2;3)\}}$.

Exercice II

1)
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ par calcul matriciel de produits.

Par récurrence immédiate, $A^n = 0$ pour tout entier $n \geq 4$. (et même pour tout entier $n \geq 3$) !

2) $x \in \mathbb{R}$ et $M(x) = I_3 + xA + \frac{x^2}{2}A^2$ (R1) Rq : l'énoncé note $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c'est une coquille remplacée en I_3.

a) $M(0) = I_3 + 0A + \frac{0^2}{2}A^2$, donc $\boxed{M(0) = I_3}$.

$B = M(4) = I_3 + 4A + 8A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{B = M(4) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

b) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, d'après (R) : $M(x) \times M(y) = \left(I_3 + xA + \frac{x^2}{2}A^2\right)\left(I_3 + yA + \frac{y^2}{2}A^2\right)$

$M(x) \times M(y) = I_3^2 + yA + \frac{y^2}{2}A^2 + xA \times I_3 + xyA^2 + \frac{xy^2}{2}A^3 + \frac{x^2}{2}A^2 \times I_3 + \frac{x^2}{2}yA^3 + \frac{x^2}{2}\frac{y^2}{2} \times A^4$

Or $A^3 = 0$ et $A^4 = 0$, donc :

$M(x) \times M(y) = I_3 + yA + \frac{y^2}{2}A^2 + xA + xyA^2 + \frac{x^2}{2}A^2 = I_3 + (x+y)A + \frac{1}{2}\underbrace{(x^2 + 2xy + y^2)}_{(x+y)^2}A^2$

$M(x) \times M(y) = I_3 + (x+y)A + \frac{1}{2}(x+y)^2 A^2 = M(x+y)$.

Ainsi, $\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ M(x) \times M(y) = M(x+y)}$

3) $\boxed{M(x)} = I_3 + xA + \frac{x^2}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

4) On sait que $M(0) = I_3$ (q 2a). Soient x et x' des réels.

$M(x) \times M(x') = M(x+x')$ (q. 2b)).

Ainsi $M(x) \times M(x') = I_3 \iff M(x+x') = I_3$

Nous allons prouver que $M(x+x') = I_3$ équivaut à $x+x'=0$ c'est à dire à $x'=-x$.

($\Rightarrow$) Supposons que $M(x+x') = I_3$.

Alors d'après q.3) on a : $\begin{pmatrix} 1 & x+x' & \frac{(x+x')^2}{2} \\ 0 & 1 & x+x' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et donc, par égalité matricielle : $x+x'=0$ et $\frac{(x+x')^2}{2}=0$ donc $x+x'=0$ donc $x'=-x$.

($\Leftarrow$) Réciproquement : Si $x'=-x$, alors $x'+x=0$ et $M(x+x') = M(0) \overset{q.2a)}{=} I_3$

donc $M(x) \times M(x') = I_3$.

Conclusion : $\boxed{M(x) \times M(x') = I_3 \iff x' = -x}$

$B = M(4)$. Donc en posant $B' = M(-4)$, on a grâce à ce établissement que $B \times B' = I_3$.

Rq : $B' = M(-4)$ est donc l'inverse de B.

Exercice IIII

$u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. $(*)$

$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1a) Par produit matriciel : $F^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $F^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

1b) $n \geq 1$. Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $F^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$.

Initialisation :

Pour $n=1$: $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 & u_1 \\ u_1 & u_0 \end{pmatrix}$ car $\boxed{u_2} = u_1 + u_0 = 1 + 0 = \boxed{1}$; $u_1 = 1$ et $u_0 = 0$.

donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier supérieur ou égal à 1 fixé.

Supposons que pour cet entier là, $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, c'est à dire : Supposons que $F^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$.

Alors : $F^{n+1} = F^n \times F \overset{\text{produit matriciel}}{=} \begin{pmatrix} u_{n+1} + u_n & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n + u_{n-1} \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix}$; $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion :

$\mathcal{P}(1)$ est vraie, et héréditaire à tout rang $n \geq 1$.

donc d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$ (avec $u_0 = u_1 = 1$).

2a) Par associativité du produit matriciel : $F^{i+j} = F^i \times F^j$ pour tous entiers naturels i et j.

donc $\boxed{F^{2n+2} = F^{n+2+n} = F^{n+2} \times F^n}$

2b) Traduisons à l'aide des coefficients la relation 2a) : $F^{2n+2} = F^{n+2} \times F^n$ s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} u_{2n+2} & u_{2n+1} \\ u_{2n+1} & u_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} u_{2n+2} & u_{2n+1} \\ u_{2n+1} & u_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \times u_{n+1} + u_{n+1} \times u_n & ** \\ ** & *** \end{pmatrix}$$

Par identification des coefficients situés à l'intersection de la 1re ligne et 1re colonne on a :

$\boxed{\text{Pour tout entier } n \geq 1, \quad u_{2n+2} = u_{n+2} \times u_{n+1} + u_{n+1} \times u_n}$

2c) (Grâce à 2b) : Pour $n \geq 1$, $u_{2n+2} = u_{n+2} \times u_{n+1} + u_{n+1} \times u_n$ (**)

On veut manifestement faire disparaître les u_{n+1} :

Or d'après la définition de (u_n), $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, donc $u_{n+1} = u_{n+2} - u_n$.

Par suite (**) donne : $u_{2n+2} = u_{n+2} \times (u_{n+2} - u_n) + (u_{n+2} - u_n) \times u_n$

$$u_{2n+2} = u_{n+2}^2 - \cancel{u_{n+2} \times u_n} + \cancel{u_{n+2} \times u_n} - u_n^2$$

$$\boxed{u_{2n+2} = u_{n+2}^2 - u_n^2}.$$

3) $u_{12} = 144 = 12^2$

2c) Se réécrit en : $u_{n+2}^2 = u_{2n+2} + u_n^2$ ce qui fait vaguement penser à l'égalité de Pythagore pourvu que u_{2n+2} soit un carré.

Posons : $u_{2n+2} = u_{12} = 144$: $2n+2 = 12$, donc $n = 5$.

Ainsi : $u_7^2 = 12^2 + u_5^2$

Or avec la relation : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, on a facilement : $u_5 = 5$ et $u_7 = 13$

Ainsi : $13^2 = 12^2 + 5^2$. Un tel triangle a donc pour longueurs de côtés : $\boxed{5 ; 12 \text{ et } 13 \text{ unités de longueur}}$

Exercice IV

$\theta \in \mathbb{R}$ et $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

1) Pour $n=0$: $(A(\theta))^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Remarque : $(A(\theta))^0 = \begin{pmatrix} \cos(0\theta) & -\sin(0\theta) \\ \sin(0\theta) & \cos(0\theta) \end{pmatrix}$.

Pour $n=1$: $(A(\theta))^1 = A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Rq : $(A(\theta))^1 = \begin{pmatrix} \cos(1\theta) & -\sin(1\theta) \\ \sin(1\theta) & \cos(1\theta) \end{pmatrix}$.

Pour $n=2$: $(A(\theta))^2 = A(\theta) \times A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & -\cos(\theta)\sin(\theta) - \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) + \cos(\theta)\sin(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$.

D'après les formules de duplication ♥ : $\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$

Donc $\boxed{(A(\theta))^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}}$

2) Grâce à q. 1) on émet la conjecture que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(A(\theta))^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$.

On procède par récurrence sur l'entier naturel n :

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $(A(\theta))^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$

Initialisation : Pour $n=0$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie d'après la question 1.

Hérédité : Soit n un entier fixé pour lequel on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est à dire que :

$\underbrace{(A(\theta))^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}}_{\text{Hyp. de récurrence}}$. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie à savoir que :

$(A(\theta))^{n+1} = \begin{pmatrix} \cos((n+1)\theta) & -\sin((n+1)\theta) \\ \sin((n+1)\theta) & \cos((n+1)\theta) \end{pmatrix}$

Or, $(A(\theta))^{n+1} = (A(\theta))^n \times A(\theta) \overset{\text{Hyp. de récurrence}}{=} \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Par produit matriciel :

$$(A(\theta))^{n+1} = \begin{pmatrix} \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) & -\sin(n\theta)\cos(\theta) - \cos(n\theta)\sin(\theta) \\ \sin(n\theta)\cos(\theta) + \cos(n\theta)\sin(\theta) & \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

D'après les formules d'addition : $\begin{cases} \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) = \cos(n\theta + \theta) = \cos((n+1)\theta) \\ \sin(n\theta)\cos(\theta) + \cos(n\theta)\sin(\theta) = \sin(n\theta + \theta) = \sin((n+1)\theta) \end{cases}$.

Donc $(A(\theta))^{n+1} = \begin{pmatrix} \cos((n+1)\theta) & -\sin((n+1)\theta) \\ \sin((n+1)\theta) & \cos((n+1)\theta) \end{pmatrix}$, donc $S(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion</u>: $S(0)$ est vraie, et $S(n)$ est héréditaire à tout rang.

Donc d'après le <u>principe de récurrence</u>: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (A(\theta))^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}}$

3a) $\forall (\theta ; \theta') \in \mathbb{R}^2$, $A(\theta) \times A(\theta') = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix}$.

$$A(\theta) \times A(\theta') = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') & -\sin(\theta)\cos(\theta') - \cos(\theta)\sin(\theta') \\ \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta') & \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') \end{pmatrix}$$

Toujours <u>d'après les formules d'additions</u> on a: $A(\theta) \times A(\theta') = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}}_{= A(\theta+\theta')}$

Donc $\boxed{A(\theta) \times A(\theta') = A(\theta+\theta')}$.

3b) Prenons $\theta' = -\theta$ et appliquons la relation du 3a):

$\boxed{A(\theta) \times A(-\theta)} = A(\theta + (-\theta)) = A(0) = A(0\theta) = \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} = \boxed{I_2}$.

Ainsi $\boxed{A(\theta) \text{ est inversible d'inverse } A(-\theta) : \ (A(\theta))^{-1} = A(-\theta)}$.

<u>Autre méthode</u>: $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$; donc $\det(A(\theta)) = \cos^2(\theta) - \sin(\theta) \times (-\sin(\theta))$

$\underline{\det(A(\theta))} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = \underline{1}$. Or $1 \neq 0$, donc $\underline{\det(A(\theta)) \neq 0}$ et

<u>$A(\theta)$ est inversible</u>. Par la formule usuelle, on trouve: $A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

donc $A^{-1} = A(-\theta)$ en se servant que $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ et $\sin(-\theta) = \sin(\theta)$ pour tout réel θ.

c) $A(3\theta) = A(2\theta) \times A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

$$A(3\theta) = \begin{pmatrix} \cos(2\theta)\cos(\theta) - \sin(2\theta)\sin(\theta) & -\sin(2\theta)\cos(\theta) - \cos(2\theta)\sin(\theta) \\ \sin(2\theta)\cos(\theta) + \cos(2\theta)\sin(\theta) & \cos(2\theta)\cos(\theta) - \sin(2\theta)\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Or $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ et $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$. et $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$

$$\text{Donc } A(3\theta) = \begin{pmatrix} (2\cos^2\theta - 1)\cos(\theta) - 2\sin^2(\theta)\cos(\theta) \; * & -2\sin(\theta)\cos^2(\theta) + (1-2\sin^2(\theta))\sin(\theta) \\ 2\sin(\theta)\cos^2(\theta) + (1-2\sin^2(\theta))\sin(\theta) \; ** & (2\cos^2(\theta)-1)\cos(\theta) - 2\sin^2(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Or, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

donc : $(2\cos^2(\theta) - 1)\cos(\theta) - 2\sin^2(\theta)\cos(\theta) = 2\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2(1 - \cos^2(\theta))\cos(\theta)$

$$* \quad \boxed{(2\cos^2(\theta) - 1)\cos(\theta) - 2\sin^2(\theta)\cos(\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)}$$

et $2\sin(\theta)\cos^2(\theta) + (1 - 2\sin^2(\theta))\sin(\theta) = 2\sin(\theta)(1 - \sin^2(\theta)) + \sin(\theta) - 2\sin^3(\theta)$.

$$** \quad \boxed{2\sin(\theta)\cos^2(\theta) + (1 - 2\sin^2(\theta))\sin(\theta) = -4\sin^3(\theta) + 3\sin(\theta)}$$

Ainsi : $\boxed{A(3\theta) = \begin{pmatrix} \cos(3\theta) & -\sin(3\theta) \\ \sin(3\theta) & \cos(3\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) & 4\sin^3(\theta) - 3\sin(\theta) \\ -4\sin^3(\theta) + 3\sin(\theta) & 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) \end{pmatrix}}$

Donc <u>par identification</u> (<u>égalité matricielle</u>) on a :

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) \\ \sin(3\theta) = -4\sin^3(\theta) + 3\sin(\theta) \end{cases}}$$

Hey Bro, j'ai eu ma dose de trigo !

Exercice V

Une ville possède un réseau de vélos en libre service dont deux stations A et B se situent en haut d'une colline. On admet qu'aucun vélo des autres stations n'arrive en direction des stations A et B.
On constate pour chaque heure n qu'en moyenne :

- 20 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station A sont toujours à cette station.
- 60 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station A sont à la station B et les autres sont dans d'autres stations du réseau ou en circulation.
- 10 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station B sont à la station A, 30 % sont toujours à la station B et les autres sont dans d'autres stations du réseau ou en circulation.
- Au début de la journée, la station A comporte 50 vélos, la station B 60 vélos.

Partie A

Au bout de n heures, on note a_n le nombre moyen de vélos présents à la station A et b_n le nombre moyen de vélos présents à la station B. On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et donc $U_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$.

1. D'après le texte, on peut dire que, pour tout n : $\begin{cases} a_{n+1} = 0,2\,a_n + 0,1\,b_n \\ b_{n+1} = 0,6\,a_n + 0,3\,b_n \end{cases}$ avec $\begin{cases} a_0 = 50 \\ b_0 = 60 \end{cases}$

   Donc $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \iff U_{n+1} = M \times U_n$ où $M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$

2. $U_1 = M \times U_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \times 50 + 0,1 \times 60 \\ 0,6 \times 50 + 0,3 \times 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 48 \end{pmatrix}$

   $U_2 = M \times U_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 16 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \times 16 + 0,1 \times 48 \\ 0,6 \times 16 + 0,3 \times 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 24 \end{pmatrix}$

3. À la calculatrice, on trouve successivement : $U_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$, $U_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $U_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

   C'est donc au bout de 5 heures qu'il ne reste qu'un seul vélo dans la station A.

Partie B

Le service décide d'étudier les effets d'un approvisionnement des stations A et B consistant à apporter après chaque heure de fonctionnement 30 vélos à la station A et 10 vélos à la station B.
Afin de conduire cette étude, il décide de modéliser la situation présente de la manière suivante :
Au bout de n heures, on note α_n le nombre moyen de vélos présents à la station A et β_n le nombre moyen de vélos présents à la station B. On note V_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions $V_{n+1} = M \times V_n + R$ avec $R = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$.

1. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N la matrice $I - M$.

   a. On désigne par V une matrice colonne à deux lignes.
   $V = M \times V + R \iff V - M \times V = R \iff I \times V - M \times V = R \iff (I - M) \times V = R \iff N \times V = R$

   b. On admet que N est une matrice inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,2 \\ 1,2 & 1,6 \end{pmatrix}$.

   $N \times V = R \iff N^{-1} \times N \times V = N^{-1} \times R \iff V = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,2 \\ 1,2 & 1,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix} \iff V = \begin{pmatrix} 1,4 \times 30 + 0,2 \times 10 \\ 1,2 \times 30 + 1,6 \times 10 \end{pmatrix}$

   $\iff V = \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}$

2. Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = V_n - V$.

a. $W_{n+1} = V_{n+1} - V$; or $V_{n+1} = M \times V_n + R$ et $V = M \times V + R$ donc, pour tout entier n :
$W_{n+1} = M \times V_n + R - (M \times V + R) = M \times V_n + R - M \times V - R = M \times (V_n - V) = M \times W_n$

b. On admet que : – pour tout entier naturel n, $W_n = M^n \times W_0$,
– pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $M^n = \dfrac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$.

$W_0 = V_0 - V = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

Pour tout n, $W_n = M^n \times W_0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $M^n = \dfrac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$; donc pour tout $n \geqslant 1$,

$W_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix} 0,2 \times 6 + 0,1 \times 8 \\ 0,6 \times 6 + 0,3 \times 8 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

On sait que, pour tout n, $W_n = V_n - V$ donc $V_n = W_n + V$.

Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $V_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}$

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^{n-1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}$

Le nombre de vélos va se stabiliser à 44 dans la station A et à 52 dans la station B.