Spé Maths TS — Corrigé du DM5 — Février 2017

Exercice I

1) p, q, r sont premiers et deux à deux distincts.

Vu que p est premier, d'après le cours, on a : $p \mid qr$ ou $\text{pgcd}(p;qr)=1$. (*)

Si $p \mid qr$, alors comme p et q sont premiers et distincts, on a : $\text{pgcd}(p;q)=1$ (démontré dans le cours : "deux nombres premiers distincts sont premiers entre-eux".)

Ainsi : $\begin{cases} p \mid qr \\ \text{pgcd}(p;q)=1 \end{cases}$, donc d'après le th. de Gauss, $p \mid r$.

Or r est premier, donc $p=1$ ou $p=r$: impossible car 1 n'est pas premier et on sait que $p \neq r$.

Donc $p \nmid qr$ donc grâce à (*), on a : $\text{pgcd}(p;qr)=1$ ■

---

1) $p, q, r \in \mathbb{P}$

(**) Si $p \mid qr$, alors comme $p \geq 2$, $\text{pgcd}(p;qr) \neq 1$.

On a établi en 1) que si p, q, r sont premiers et deux à deux distincts, alors $\text{pgcd}(p;qr)=1$. Par suite, par contraposée :

Si $\text{pgcd}(p;qr) \neq 1$, alors p, q, r non deux à deux distincts.

Donc $p=q$ ou $p=r$ ou $q=r$: dans ce cas là, $p \mid q^2$ vu que $qr=q^2$, donc $p \mid q$ car $p \in \mathbb{P}$! donc $p=q$ car $p \in \mathbb{P}$!

Dans tous les cas de figures, p est égal à q ou r ■

Exercice II

$k \geq 2$, $M_k = 2^k - 1$

1a)

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_k	3	7	15	31	63	127	255	523	1023

1b) Si $k \in \{2;3;5;7\}$, alors $M_k \in \{3;7;31;127\}$. Trivialement, 3; 7; 31 sont premiers et pour 127 vu que $\sqrt{127} < 13$ et que aucun des éléments de $\{2;3;5;7;11\}$ ne divise 127, il en résulte que $127 \in \mathbb{P}$.

Donc d'après le tableau, il se dégage que si $k \in \mathbb{P}$, alors $M_k \in \mathbb{P}$.

2) $p, q \in \mathbb{N}^*$.

a) $S = 1 + 2^p + (2^p)^2 + \dots + (2^p)^{q-1}$ est la somme des q premiers termes de la suite géométrique de raison $Q = 2^p$ et de premier terme 1. Vu que $p \in \mathbb{N}^*$, $2^p \geq 2$, donc $2^p \neq 1$, donc $Q \neq 1$.

Par suite (# relation du cours sur les suites) : $S = \text{premier terme} \times \dfrac{1-Q^{\text{nb termes}}}{1-Q} = 1 \times \dfrac{1-(2^p)^q}{1-2^p}$

$$S = \frac{1-(2^p)^q}{1-2^p} = \frac{(2^p)^q - 1}{2^p - 1}$$ (on a multiplié par -1 numérateur et dénominateur!).

$$S = \frac{2^{pq}-1}{2^p-1}$$

2b) Grâce à 2a) on a : $(1+2^p+\dots+(2^p)^{q-1})\times(2^p-1) = 2^{pq}-1$

Or, $1+2^p+\dots+(2^p)^{q-1} \in \mathbb{N}^*$ en tant que somme de q entiers naturels (non nuls) et $2^p-1 \in \mathbb{N}^*$ et $2^{pq}-1 \in \mathbb{N}^*$.

Par suite, $\boxed{2^{pq}-1 \text{ est divisible par } 2^p-1}$.

2c) Soit $k \geq 2$ et k non premier : donc k admet au moins un diviseur premier p : il existe donc $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{P}$ tel que : $k = pq$.

Par suite, $M_k = M_{pq} = 2^{pq}-1$ et grâce à 2b), M_{pq} est divisible par 2^p-1 avec $2^p-1 > 1$ (car $p \in \mathbb{P}$, donc $p \geq 2$)

donc M_{pq} n'est pas premier.

3a) $M_{11} = 2^{11}-1 = 2047$.

$\sqrt{2047} \approx 45,2$ et la liste des nombres premiers inférieurs à $\sqrt{2047}$ est $\{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43\}$.

En effectuant la D.E de 2047 par 23 on trouve 89. donc $2047 = 23 \times 89$ et par suite $2047 \notin \mathbb{P}$.

Par suite $\boxed{M_{11} \notin \mathbb{P}}$

3b) La conjecture émise en 1b) s'avère donc être fausse vu que $11 \in \mathbb{P}$ et que $M_{11} \notin \mathbb{P}$ (contre-exemple fournit grâce à la question 3a).

Suite : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 2$.

Si $n \geq 2$, $M_n \in \mathbb{P}$ ssi $u_{n-2} \equiv 0\ (M_n)$ (Test de Lucas-Lehmer).

① On doit vérifier grâce au test que $u_{5-2} \equiv 0\ (M_5)$ c'est à dire que $u_3 \equiv 0\ (31)$ vu que $M_5 = 31$.

Or, $u_0 = 4$, donc $u_1 = 4^2-2 = 14$; $u_2 = 14^2-2 = 194$ et $u_3 = 194^2-2 = 37634$.

Or, $37634 \div 31$: $37634 = 31 \times 1214$, donc $31 \mid 37634$ et $37634 \equiv 0\ (31)$.

Donc $u_3 \equiv 0\ (31)$, donc $M_5 \in \mathbb{P}$.

② M prend la valeur 2^n-1

Pour i allant de 1 à $n-2$, faire

u prend la valeur u^2-2

⋮

Si M divise u, alors afficher M est premier

Sinon afficher M n'est pas premier.