TS Spé — Corrigé du DM4 — Janvier 2017

(1)

Exercice 1

Partie A

① 01/08 : On calcule $1\times 12 + 8\times 37 = 12 + 296 = \underline{308}$.

2a) On a : $Z = 12j + 37m$, donc $Z \equiv 12j + 37m\ (12)$.

j est entier, donc $\underline{12j \equiv 0\ (12)}$, donc $12j + 37m \equiv 37m\ (12)$.

OR $36 \equiv 0\ (12)$, donc $36m \equiv 0\ (12)$, donc $37m \equiv m\ (12)$. (Par compatibilité de la relation de congruence avec les additions et les multiplications).

Par suite, $\underline{Z \equiv m\ (12)}$.

2b) On a : $12j + 37m = 474$.

Or, $474 \,|\, 12$: $474 = 12 \times 39 + 6$, 114, donc $474 \equiv 6\ (12)$.

Vu que $\underline{Z \equiv m\ (12)}$ d'après 2a), il en résulte que $\underline{m \equiv 6\ (12)}$. Comme $\underline{1 \leq m \leq 12}$, on en déduit que $\underline{m = 6}$.

Par suite, $j = \dfrac{474 - 37\times 6}{12} = \dfrac{474 - 222}{12} = \dfrac{252}{12} = \underline{21}$.

La date d'anniversaire de ce spectateur est donc le 21 Juin.

Partie B.

Ici, $Z = 12j + 31m$

① On intercale après Z prend la valeur $12j + 31m$:

" Si $12j + 31m = 503$ "

Alors

Afficher j et afficher m

Fin de si

Même suite de programme ! (Inutile de faire afficher Z toutefois).

② a) $Z = 12j + 31m$.

Or, j est entier, donc $12j \equiv 0\ (12)$ et $31 \equiv 7\ (12)$, car $12 \,|\, 31 - 7 = 24$.

donc $31m \equiv 7m\ (12)$ et donc $12j + 31m \equiv 7m\ (12)$

Par suite, comme $Z \equiv 12j + 31m\ (12)$, on a : $Z \equiv 7m\ (12)$.

Deux entiers congrus modulo 12 ont le même reste ds la D.E par 12.

Donc $\underline{7m \text{ et } Z \text{ ont le même reste ds la D.E par } 12}$.

b)

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
r	7	2	9	4	11	6	1	7	3	10	5	0

r est le reste ds la D.E de $7m$ par 12.

2c) $z = 503$

$$\begin{array}{r|l} 503 & 12 \\ 23 & 41 \\ 11 & \end{array}$$

$r = 11$.

Grâce à 2a) et 2b), on déduit que $m = 5$.

Par suite, $12j + 31 \times 5 = 503$

$$j = \frac{503 - 31 \times 5}{12} = \frac{503 - 155}{12} = \frac{348}{12} = 29.$$

Avec le programme de calcul (B), le spectateur est né le 29 Mai.

3) a) Soit $(x;y) = (-2;17)$: $12x + 31y = 12 \times (-2) + 31 \times 17 = -24 + 527 = 503$.

Donc $(-2;17)$ est bien solution de l'équation : $12x + 31y = 503$.

b) Si $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ est solution de $12x + 31y = 503$, alors, comme $12 \times (-2) + 31 \times 17 = 503$ on a :

$12x + 31y = 12 \times (-2) + 31 \times 17$

$12x - 12 \times (-2) = 31 \times 17 - 31y$

$12(x+2) = 31(17-y)$

c) $12x + 31y = 503 \iff 12(x+2) = 31(17-y) \implies 31 \mid 12(x+2)$. Or $PGCD(31;12) = 1$

donc 31 et 12 sont premiers entre eux.

$\begin{cases} 31 \mid 12(x+2) \\ PGCD(31;12) = 1 \end{cases}$, donc d'après le théorème de Gauss, $31 \mid x+2$: il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x + 2 = 31k$

Donc $x = 31k - 2$.

Par suite on a : $12 \times 31k = 31(17-y)$, donc $12k = 17 - y$, donc $y = -12k + 17$.

Ainsi, si $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ est solution de cette équation, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x = -2 + 31k$ et $y = 17 - 12k$.

Réciproquement, montrons que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $(-2+31k; 17-12k)$ est bien solution de l'équation : $12x + 31y = 503$.

Or, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $12(-2+31k) + 31(17-12k) = -24 + \cancel{12 \times 31k} + 31 \times 17 - \cancel{31 \times 12k} = -24 + 527 = 503$.

Donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ (-2+31k; 17-12k) \text{ est solution de } (E)}$ où (E) : $12x + 31y = 503$.

d) $y = 17 - 12k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$1 \leq y \leq 12 \iff 1 \leq 17 - 12k \leq 12 \iff -16 \leq -12k \leq -5 \iff \frac{5}{12} \leq k \leq \frac{16}{12}$

$\frac{5}{12} \simeq 0{,}41$; $\frac{16}{12} \simeq 1{,}3$

Or $k \in \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \cap \left[\frac{5}{12}; \frac{16}{12}\right] = \{1\}$. Donc $k = 1$.

Par suite, $x = -2 + 31k = -2 + 31 \times 1 = 29$ et $y = 17 - 12k = 17 - 12 \times 1 = 5$.

S'il obtient 503 avec le programme (B), alors le spectateur est bien né le 29 Mai !

Exercice II $(E) : 23x - 26y = 1$.

Partie A

1) Pour $x = -9$ et $y = -8$, $23x - 26y = 23\times(-9) - 26\times(-8) = -207 + 208 = 1$.

Donc $(-9;-8)$ est solution de l'équation (E).

2) Soit $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$.

$(x;y)$ est solution de (E) ssi $23x - 26y = 1$, or $23\times(-9) - 26\times(-8) = 1$, donc $23x - 26y = 23\times(-9) - 26\times(-8)$

Donc $23x + 23\times 9 = 26y + 26\times 8$

$23(x+9) = 26(y+8)$ avec $x+9 \in \mathbb{Z}$ et $y+8 \in \mathbb{Z}$.

Donc $26 \mid 23(x+9)$.

Or, $PGCD(26, 23) = PGCD(26-23; 23) = PGCD(3; 23) = 1$.

Donc : $\begin{cases} 26 \mid 23(x+9) \\ \text{et } PGCD(26;23) = 1 \end{cases}$, donc d'après le théorème de Gauss, $26 \mid x+9$: il existe donc $k \in \mathbb{Z}$

tel que : $x + 9 = 26k$, donc $x = 26k - 9$.

Par suite, $23(x+9) = 26(y+8)$ s'écrit : $23\times 26k = 26(y+8)$, donc $y + 8 = 23k$, donc $y = 23k - 8$.

En conclusion, si $(x;y)$ est solution de (E), alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x = 26k - 9$ et $y = 23k - 8$.

Réciproquement, montrons que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $(26k-9; 23k-8)$ est solution de (E) :

Or, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $23(26k-9) - 26(23k-8) = 23\times 26k - 23\times 9 - 26\times 23k + 26\times 8 = -207 + 208 = 1$.

Donc $(26k-9; 23k-8)$ est solution de (E).

Conclusion : $\boxed{S_{(E)} = \{(26k-9; 23k-8); k \in \mathbb{Z}\}}$.

3) Si x est solution de (E), alors $23x \equiv 1 (26)$ car $-26y \equiv 0 (26)$ vu que $26 \equiv 0 (26)$

Grâce à 2, $x = 26k - 9$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On veut que $0 \leq x \leq 25$, donc $0 \leq 26k - 9 \leq 25$, donc $9 \leq 26k \leq 34$, donc $\frac{9}{26} \leq k \leq \frac{34}{26}$ car $26 > 0$

Or $0 < \frac{9}{26} < 1$ et $1 < \frac{34}{26} < 2$, donc comme $k \in \mathbb{Z}$, $k = 1$.

Par suite, $x = 26\times 1 - 9 = 17$.

$a = 17$ est tel que : $0 \leq a \leq 25$ et $23a \equiv 1 (26)$.

Partie B

$(x_1; x_2) \longmapsto (y_1; y_2)$ avec : $\begin{cases} y_1 \equiv 11x_1 + 3x_2 (26) \\ y_2 \equiv 7x_1 + 4x_2 (26) \end{cases}$ et $0 \leq y_1 \leq 25$, $0 \leq y_2 \leq 25$.

1) ST : $x_1 = 18$ et $x_2 = 19$.

On : $\begin{cases} y_1 \equiv 11\times 18 + 19\times 3 (26) \\ y_2 \equiv 7\times 18 + 4\times 19 (26) \end{cases}$ et $0 \leq y_1 \leq 25$ et $0 \leq y_2 \leq 25$.

Or, $11\times 18 + 19\times 3 = 198 + 57 = 255$

$\begin{array}{r|l} 255 & 26 \\ 21 & 9 \end{array}$ Donc $y_1 \equiv 21\ (26)$ et comme $0 \leq 21 \leq 25$, $y_1 = 21$ ce qui correspond à la lettre V.

De même : $7\times 18 + 4\times 19 = 202$

$\begin{array}{r|l} 202 & 26 \\ 20 & 7 \end{array}$ donc $y_2 \equiv 20\ (26)$ et comme $0 \leq 20 \leq 25$, $y_2 = 20$ ce qui correspond à la lettre U.

Ainsi, le mot ST est codé en VU.

2a) Soit $(x_1 ; x_2)$ solution de (S_1) : $\begin{cases} y_1 \equiv 11x_1 + 3x_2 \ (26) \\ y_2 \equiv 7x_1 + 4x_2 \ (26) \end{cases}$.

Alors, par compatibilité de la relation de congruence avec l'addition et la multiplication :

$$\begin{cases} 4y_1 + 23y_2 \equiv 4(11x_1 + 3x_2) + 23(7x_1 + 4x_2) \quad (26) \\ 19y_1 + 11y_2 \equiv 19(11x_1 + 3x_2) + 11(7x_1 + 4x_2) \quad (26) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 23y_2 \equiv (4\times 11 + 23\times 7)x_1 + (4\times 3 + 23\times 4)x_2 \quad (26). \\ 19y_1 + 11y_2 \equiv (19\times 11 + 11\times 7)x_1 + (19\times 3 + 11\times 4)x_2 \quad (26) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 23y_2 \equiv 205x_1 + 26\times 4x_2 \ (26) \equiv 205x_1 \ (26) \\ 19y_1 + 11y_2 \equiv 26\times 11x_1 + 101x_2 \ (26) \equiv 101x_2 \ (26) \end{cases}$$

Or $\begin{array}{r|l} 205 & 26 \\ 23 & 7 \end{array}$, donc $205 \equiv 23\ (26)$

$\begin{array}{r|l} 101 & 26 \\ 23 & 3 \end{array}$, donc $101 \equiv 23\ (26)$.

Par suite, $205x_1 \equiv 23x_1\ (26)$ et $101x_2 \equiv 23x_2\ (26)$.

Donc : $\boxed{\begin{cases} 4y_1 + 23y_2 \equiv 23x_1 \quad (26) \\ 19y_1 + 11y_2 \equiv 23x_2 \quad (26) \end{cases}}$.

b) Soit $(x_1 ; x_2)$ solution de (S_2) : $\begin{cases} 23x_1 \equiv 4y_1 + 23y_2 \quad (26) \\ 23x_2 \equiv 19y_1 + 11y_2 \quad (26) \end{cases}$.

Grâce à $\boxed{B}$ question 3, on sait que $23\times 17 \equiv 1\ (26)$, d'où l'idée d'utiliser la compatibilité de la congruence avec la multiplication et de multiplier chacune des lignes de (S_2) par 17 :

$$(x_1 ; x_2) \text{ solution de } (S_2) \Rightarrow \begin{cases} 23\times 17x_1 \equiv 17(4y_1 + 23y_2) \ (26) \\ 23\times 17x_2 \equiv 17(19y_1 + 11y_2) \ (26) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \equiv 68y_1 + 391y_2 \ (26) \\ x_2 \equiv 323y_1 + 187y_2 \ (26) \end{cases}$$

Or $\begin{array}{r|l} 68 & 26 \\ 16 & 2 \end{array}$, donc $68 \equiv 16\ (26)$

$\begin{array}{r|l} 391 & 26 \\ 1 & 15 \end{array}$, donc $391 \equiv 1\ (26)$

$\begin{array}{r|l} 323 & 26 \\ 11 & 12 \end{array}$ donc $323 \equiv 11\ (26)$

$\begin{array}{r|l} 187 & 26 \\ 5 & 7 \end{array}$, donc $187 \equiv 5\ (26)$.

Par compatibilité de $\equiv$ avec la multiplication et l'addition :

Par suite, $\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + y_2 \ (26) \\ x_2 \equiv 11y_1 + 5y_2 \ (26) \end{cases}$ ∎

c) Si $(x_1 ; x_2)$ est solution de (S_3), alors : $\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + y_2 \ (26) \\ x_2 \equiv 11y_1 + 5y_2 \ (26) \end{cases}$

Par suite, $\begin{cases} 11x_1 + 3x_2 \equiv 11(16y_1 + y_2) + 3(11y_1 + 5y_2) \ (26) \\ 7x_1 + 4x_2 \equiv 7(16y_1 + y_2) + 4(11y_1 + 5y_2) \ (26) \end{cases}$

$\begin{cases} 11x_1 + 3x_2 \equiv 11 \times 19\, y_1 + 26\, y_2 \ (26) \equiv 209\, y_1 \ (26) \\ 7x_1 + 4x_2 \equiv (7 \times 16 + 4 \times 11) y_1 + 27 y_2 \ (26) \end{cases}$

OR $209 \,|\, 26$, $1 \,|\, 8$ donc $209 \equiv 1 (26)$

donc $209 y_1 \equiv y_1 (26)$.

$27 \equiv 1 (26)$ donc $27 y_2 \equiv y_2 (26)$

$7 \times 16 + 4 \times 11 = 156$

$156 \,|\, 26$, $0 \,|\, 6$ $\quad 156 \equiv 0 (26)$

donc $156 y_1 \equiv 0 (26)$.

$\begin{cases} 11x_1 + 3x_2 \equiv y_1 \ (26) \\ 7x_1 + 4x_2 \equiv y_2 \ (26) \end{cases}$

Ainsi, (S_1) est donc vérifié.

d)

On a donc prouvé que : Si $(x_1 ; x_2)$ vérifie (S_1), alors $(x_1 ; x_2)$ est solution de (S_3) grâce à 2a) et 2b).

Si $(x_1 ; x_2)$ vérifie (S_3), alors $(x_1 ; x_2)$ vérifie (S_1).

En conclusion, $\boxed{(S_1) \text{ et } (S_3) \text{ sont équivalents et ont donc le même ensemble de solutions!}}$

YJ : $\begin{cases} y_1 = 24 \\ y_2 = 9 \end{cases}$, donc $\begin{cases} x_1 \equiv 16 \times 24 + 9 \ (26) \text{ et } 0 \leq x_1 \leq 25. \\ x_2 \equiv 11 \times 24 + 5 \times 9 \ (26) \text{ et } 0 \leq x_2 \leq 25. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 \equiv 393 (26) \\ x_2 \equiv 309 (26) \end{cases}$

$393 \,|\, 26$, $3 \,|\, 15$ $\quad 393 \equiv 3 (26)$ et $0 \leq 3 \leq 25$, donc $x_1 = 3$.

$309 \,|\, 26$, $23 \,|\, 11$ $\quad 309 \equiv 23 (26)$ et $0 \leq 23 \leq 25$, donc $x_2 = 23$

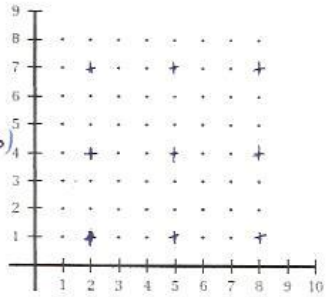
Par suite, Y se décode en D et J se décode en X, donc YJ se décode en DX.

Exercice III

A- 1), 2), 3) : à faire !

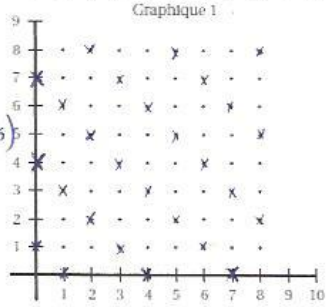
Annexe à l'exercice III

(8 points)



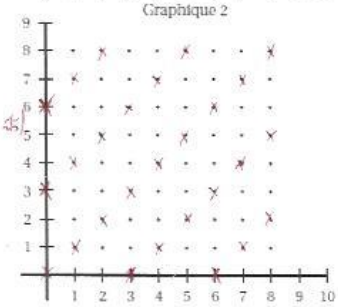
Graphique 1

(7 points)



Graphique 2

(7 points)



Graphique 3

B- $(E) : 7x - 4y = 1$ avec $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$.

① Faisons $x = 3$ et $y = 5$: $7x - 4y = 7 \times 3 - 4 \times 5 = 21 - 20 = 1$.

Donc $(x_0 ; y_0) = (3 ; 5)$ est un couple solution de (E).

② $7x - 4y = 1 \iff 7x - 4y = 7x_0 - 4y_0 \iff 7x - 7x_0 = 4y - 4y_0$

$\iff 7(x - x_0) = 4(y - y_0)$

$\Rightarrow 4 \mid 7(x - x_0)$ et $\text{PGCD}(4 ; 7) = 1$, donc d'après le th. de Gauss

$4 \mid x - x_0$: $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $x - x_0 = 4k$, donc $x = 4k + x_0$

$x = 4k + 3$.

Ensuite : $7 \times 4k = 4(y - y_0)$, donc $y - y_0 = 7k$

donc $y = 7k + y_0 = 7k + 5$.

Réciproquement, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $7(4k+3) - 4(7k+5) = \cancel{28k} + 21 - \cancel{28k} - 20 = 1$.

Donc $\forall k \in \mathbb{Z}$, $(4k+3, 7k+5)$ est bien solution de (E).

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E)} = \{(4k+3 ; 7k+5) ; k \in \mathbb{Z}\}}$$

③ $M(x ; y) \in R_{4,7} \iff 0 \leq x \leq 4$ et $0 \leq y \leq 7$ avec x, y entiers.

OR $\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq 4k+3 \leq 4 \\ 0 \leq 7k+5 \leq 7 \\ k \text{ entier} \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{3}{4} \leq k \leq \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{7} \leq k \leq \frac{2}{7} \\ k \text{ entier} \end{cases} \iff k = 0.$

Donc $x = 4 \times 0 + 3 = 3$ et $y = 7 \times 0 + 5 = 5$.

Seul $M(3 ; 5)$ appartient $R_{4,7}$ avec $(3,5)$ solution de (E).

C- Soit $M(x ; y)$ avec $M \in [OA]$. $\exists \lambda \in [0 ; 1]$ tel que : $\vec{OM} = \lambda \vec{OA}$

① OR, $\vec{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{OA}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Donc $x = \lambda a$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$, donc comme $a \in \mathbb{N}^*$, $a > 0$, donc $0 \leq \lambda a \leq a$, donc $0 \leq x \leq a$.

et $y = \lambda b$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$, donc comme $a > 0$, $0 \leq \lambda b \leq b$, donc $0 \leq y \leq b$.

$\vec{OA}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dirige (OA) qui a donc pour équation cartésienne : $bx - ay + c = 0$.

$O(0 ; 0) \in (OA) \iff b \times 0 - a \times 0 + c = 0 \iff c = 0$

Donc on a : $bx - ay = 0$, c'est à dire $ay = bx$.

② On suppose que $\text{PGCD}(a ; b) = 1$. La relation $ay = bx$ implique, vu que tous les nombres sont entiers, $b \neq 0$, $b \mid ay$ et comme $\text{PGCD}(a ; b) = 1$, d'après le théorème de Gauss, $b \mid y$.

Par suite, comme b et y sont des entiers naturels (et $b \neq 0$), on a : $\underbrace{0 < b \leq y}_{(*)}$.

Or, grâce à (1c), $\underbrace{0 \leq y \leq b}_{(**)}$. Grâce à (*) et (**) on déduit que : $y \leq b \leq y$, donc $\boxed{b = y}$.

Par suite comme $ay = bx$, on a vu que $b = y$: $ay = yx \iff y(a-x) = 0 \iff \left| \begin{array}{l} y = 0 \\ \text{ou} \\ x = a \end{array} \right.$

(*) Si $y = 0$, alors comme $ay = bx$, on a : $a \times 0 = b \times x$, donc $bx = 0$, et comme $b \neq 0$, $x = 0$: Donc le point $O(0;0) \in \mathcal{R}_{a,b}$.

(**) Si $x = a$, alors $ay = bx = ba$, donc $ay = ba$ et comme $a \neq 0$, $y = b$, donc $A(a;b) \in \mathcal{R}_{a;b}$.

Donc $\boxed{\text{Si a et b sont premiers entre-eux, alors } [OA] \cap \mathcal{R}_{a,b} = \{O ; A\}}$.

(3) Supposons a et b non premiers entre-eux. Soit $d = PGCD(a;b)$: $(d \geq 2)$

il existe donc $a' \in \mathbb{N}^*$ et $b' \in \mathbb{N}^*$ tels que : $\begin{cases} a = da' \\ b = db' \end{cases}$ et $PGCD(a';b') = 1$ (cf. cours !!).

La relation $ay = bx$ s'écrit donc : $da'y = db'x$, et vu que $d \neq 0$ car $d \geq 2$ on a :

$a'y = b'x$.

Le raisonnement de la question (2) est alors applicable car a' et b' sont premiers entre-eux.

Par suite $M'(a';b') \in [OA] \cap \mathcal{R}_{a,b}$ (on a $0 < a' < a$ et $0 < b' < b$ car $d \geq 2$).

Donc $M'\left(\frac{a}{PGCD(a;b)} ; \frac{b}{PGCD(a;b)}\right)$ est un autre point, distinct de O et A, qui appartient à $[OA] \cap \mathcal{R}_{a,b}$.

En conclusion, si $PGCD(a;b) \neq 1$, $[OA]$ contient au moins trois points distincts de $\mathcal{R}_{a,b}$.

$O(0;0) \in [OA] \cap \mathcal{R}_{a,b}$.

Soit $M_1(a';b')$: $M_1 \in [OA] \cap \mathcal{R}_{a,b}$ avec $a = da'$ et $b = db'$ où $d = pgcd(a;b)$.

Montrons que pour tout entier $k \in \{0;1;\dots;d\}$, $M_k(ka';kb') \in [OA] \cap \mathcal{R}_{a,b}$.

Or $0 < a'$, donc $0 \leq ka' \leq da'$ car $k \geq 0$ et $k \leq d$. Vu que $da' = a$ on a bien : $0 \leq ka' \leq a$

De même $0 < b'$, donc $0 \leq kb' \leq db'$ car $k \geq 0$ et $k \leq d$, donc comme $db' = b$, on a bien : $0 \leq kb' \leq b$.

Enfin, vu que $M_1(a';b') \in [OA] \cap \mathcal{R}_{a,b}$, on a : $ab' = ba'$, par suite, pour tout entier $k \in \{0;1;\dots;d\}$

$kb'a = ka'b$ avec $0 \leq ka' \leq a$ et $0 \leq kb' \leq b$.

donc $\forall k \in \{0;1;\dots;d\}$, $M_k(ka';kb') \in [OA] \cap \mathcal{R}_{a,b}$.

De plus, si $k \neq l$ (k, l entiers de $\{0; 1; \dots d\}$), alors $M_k \neq M_l$: en effet, $M_k(ka'; kb')$ $M_l(la'; lb')$ et $M_k = M_l \iff \begin{cases} la' = ka' \\ lb' = kb' \end{cases} \underset{\substack{a' \neq 0 \\ b' \neq 0}}{\iff} l = k$.

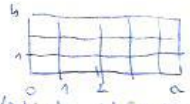
(8)

En conclusion, les $d+1$ points distincts $M_k(ka'; kb')$ avec $0 \leq k \leq d$ appartiennent à $[OA]$ et à $\mathcal{R}_{a,b}$.

(Il ne peut pas y en avoir d'autres, car grâce au début de (3), $M(x;y) \in [OA] \cap \mathcal{R}_{a,b} \Rightarrow a' | x$, donc $\exists k \in \mathbb{N}$ tq $x = ka'$ et comme $x \leq a$, $ka' \leq a$, donc $k \leq \frac{a}{a'}$ avec $\frac{a}{a'} = d$, donc $k \leq d$).

Lorsque $PGCD(a;b) \neq 1$, il y a donc $\boxed{PGCD(a;b)+1 \text{ points communs à } [OA] \text{ et } \mathcal{R}_{a,b}}$.

(4) Cette question est une question de dénombrement :



Pour traverser une maille, $[OA]$ doit franchir $a-1$ verticales d'équations entières $x = k$ avec $1 \leq k \leq a-1$

et aussi $b-1$ horizontales (d'équation $y = l$ avec $1 \leq l \leq b-1$).

Ne pas perdre de vue que $[OA]$ peut franchir aussi une maille à la fois à l'horizontale et à la verticale c'est à dire lorsque $[OA]$ passe par un point à coordonnées entières : il faudra décompter ces derniers.

(*) Au total, il y aura donc : $\underbrace{1}_{\substack{\text{Maille} \\ \text{contenant} \\ \text{le point} \\ O}} + \underbrace{(a-1)}_{\substack{\text{Nb de} \\ \text{mailles} \\ \text{franchies} \\ \text{à la verticale}}} + \underbrace{(b-1)}_{\substack{\text{Nb de} \\ \text{mailles} \\ \text{franchies} \\ \text{à l'horizontale}}} - \underbrace{(d+1-2)}_{\substack{\text{Nb de points à} \\ \text{coordonnées entières} \\ \text{sur }]OA[\text{ (on exclut O et A} \\ \text{car on a déjà} \\ \text{comptabilisé les} \\ \text{mailles franchies} \\ \text{contenant ces} \\ \text{points)}}} = a+b-d$ mailles traversées par $[OA]$.

$[OA]$ traverse donc $a+b-PGCD(a;b)$ mailles.

(*) On utilise le fait que : $\#(X \cup Y) = \#(X) + \#(Y) - \#(X+Y)$

Exercice IV $\Omega = [\![1;20]\!]$.

$a \in \Omega$ est inversible modulo 8 ssi il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que : $ab \equiv 1\,(8)$.

Or, $ab \equiv 1\,(8) \iff ab - 1 \equiv 0\,(8) \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tq $ab - 1 = 8k \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tq $ab - 8k = 1$.

D'après le Théorème de Bezout, vu que $b \in \mathbb{Z}$, la précédente relation équivaut à : a et 8 sont premiers entre-eux.

$\boxed{a \in \Omega \text{ est donc inversible modulo 8 ssi } PGCD(a;8) = 1.}$

Notons $Inv(\Omega)$ l'ensemble des inversibles modulo 8 de Ω :

Vu que : $PGCD(1;8) = 1$, $1 \in Inv(\Omega)$

$PGCD(3;8) = 1$, $3 \in Inv(\Omega)$

$PGCD(5;8) = 1$, $5 \in Inv(\Omega)$

$PGCD(7;8) = 1$, $7 \in Inv(\Omega)$

$PGCD(9;8) = 1$, $9 \in Inv(\Omega)$

$PGCD(11;8) = 1$, donc $11 \in Inv(\Omega)$

$PGCD(13;8) = 1$, donc $13 \in Inv(\Omega)$.

$PGCD(15;8) = PGCD(17;8) = PGCD(19;8) = 1$

donc $15 \in Inv(\Omega)$; $17 \in Inv(\Omega)$

et $19 \in Inv(\Omega)$.

Par suite, $\boxed{Inv(\Omega) = \{1;3;5;7;9;11;13;15;17;19\}}$.

On se limite à chercher les inverses de 1, 3, 5 et 7 dans Ω :

en effet, si a est inversible modulo 8 alors il existe $b \in \mathbb{Z}$ tq $ab \equiv 1\,(8)$.

De plus, si $c \equiv a\,(8)$ montrons que b est également un inverse de c :

On a : $ab \equiv 1\,(8)$ et $c \equiv a\,(8)$, donc $bc \equiv ab\,(8)$ par la compatibilité de la congruence avec le produit.

Or, $ab \equiv 1\,(8)$, donc $bc \equiv 1\,(8)$, donc $cb \equiv 1\,(8)$, donc b est un inverse de c modulo 8.

*) $1 \times 1 = 1$ et $1 \equiv 1\,(8)$, donc un inverse de 1 modulo 8 est 1.

$3 \times 3 = 9$ et $9 \equiv 1\,(8)$, donc un inverse de 3 modulo 8 est 3.

$5 \times 5 = 25$ et $25 \equiv 1\,(8)$, donc un inverse de 5 modulo 8 est 5.

$7 \times 7 = 49$ et $49 \equiv 1\,(8)$, ——— 7 ——— 7.

Par suite, un inverse de 9 modulo 8 est 1

——— 11 ——— 3

13 ——— 5

——— 15 ——— 7

——— 17 ——— 1

——— 19 ——— 3