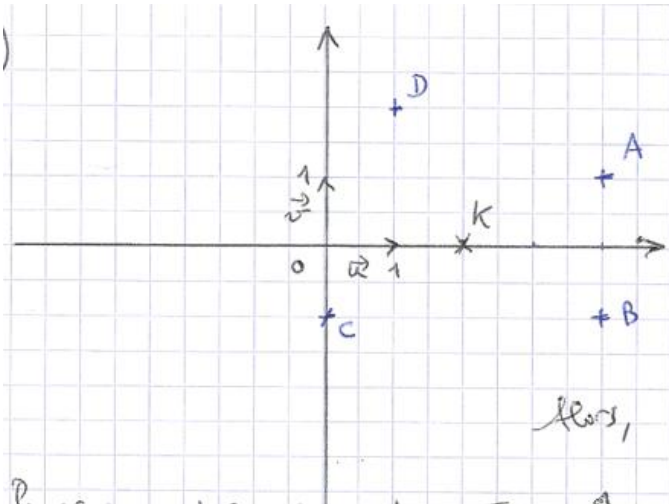
Exercice I

0) et 1)



2) Conjecture : Visiblement, ABC est rectangle en B, donc le centre de son cercle circonscrit est K = milieu de [AC].

Soit K = milieu de [AC].

Alors, $z_K = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{4+i+(-i)}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Prouvons que A, B, C et D sont situé sur même cercle de centre K.

$AC = |z_C - z_A| = |-i-(4+i)| = |-i-4-i| = |-4-2i| = \sqrt{(-4)^2+(-2)^2} = \sqrt{20}$.

donc $KA = KC = \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$.

$KB = |z_B - z_K| = |4-i-2| = |2-i| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$.

$KD = |z_D - z_K| = |1+2i-2| = |-1+2i| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$.

Bref, $KA = KB = KC = KD = \sqrt{5}$, donc A, B, C, D sont situés sur le même cercle de centre $K(2)$ et de rayon $R = \sqrt{5}$.

3) $z \neq 2$, $M(z)$ et $M'(z')$ avec $z' = \frac{iz+10-2i}{z-2}$.

a) $z_{A'} = \frac{iz_A+10-2i}{z_A-2} = \frac{i(4+i)+10-2i}{4+i-2} = \frac{4i+i^2+10-2i}{2+i} = \frac{9+2i}{2+i}$

$\boxed{z_{A'}} = \frac{(9+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{18-9i+4i-2i^2}{2^2+1^2} = \frac{18-5i+2}{5} = \frac{20-5i}{5} = \boxed{4-i}$

Rq : $A' = B$.

$z_{B'} = \frac{iz_B+10-2i}{z_B-2} = \frac{i(4-i)+10-2i}{4-i-2} = \frac{4i-i^2+10-2i}{2-i} = \frac{11+2i}{2-i}$

$\boxed{z_{B'}} = \frac{(11+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{22+2i^2+11i+4i}{5} = \frac{20+15i}{5} = \boxed{4+3i}$

$z_{C'} = \frac{i(-i)+10-2i}{-i-2} = \frac{1+10-2i}{-2-i} = \frac{11-2i}{-2-i} = \frac{(11-2i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = \frac{-20+15i}{5}$

$\boxed{z_{C'}} = \boxed{-4+3i}$

3b) $P(i)$

$$\begin{cases} A'P = |z_{A'} - z_P| = |4-i-i| = |4-2i| = \sqrt{4^2+(-2)^2} = \sqrt{20} \\ B'P = |z_{B'} - z_P| = |4+3i-i| = |4+2i| = \sqrt{20} \quad (4+2i = \overline{4-2i}) \\ C'P = |z_{C'} - z_P| = |-4+3i-i| = |-4+2i| = \sqrt{(-4)^2+2^2} = \sqrt{20}. \end{cases}$$

Donc A', B' et C' sont situés sur le même cercle de centre $P(i)$ et de rayon $R = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

3c) $|z'-i| = \left| \frac{iz+10-2i}{z-2} - i \right| = \left| \frac{iz+10-2i-i(z-2)}{z-2} \right|$

$|z'-i| = \left| \frac{\cancel{iz}+10-\cancel{2i}-\cancel{iz}+\cancel{2i}}{z-2} \right| = \left| \frac{10}{z-2} \right| = \frac{10}{|z-2|}$

d) $M(z) \in \mathcal{C}$: donc $|z-2| = \sqrt{5}$ car $MK = R = \sqrt{5}$.

d'où $|z'-i| \overset{3c)}{=} \frac{10}{|z-2|} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$.

e) Si $M(z) \in \mathcal{C}$, alors $M'(z')$ vérifie, d'après la question précédente : $|z'-i| = 2\sqrt{5}$.

Donc $|z_{M'} - z_P| = 2\sqrt{5}$, par suite, $M'P = 2\sqrt{5}$ et donc le point M' appartient au cercle $\mathcal{C}'$ de centre $P(i)$ et de rayon $R = 2\sqrt{5}$.

On a donc établi que $f(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}'$

$\subset$ inclus dans.

Exercice II

Soit A le point d'affixe $z_A = 2i$ et B celui d'affixe $z_B = -1$.

$|z-2i| = |z_M - z_A| = AM$ et $|z+1| = |z-(-1)| = |z_M - z_B| = BM$.

Ainsi, $|z-2i| = |z+1|$ équivaut à $AM = BM$ ce qui équivaut à dire que M appartient à la médiatrice de [AB]. Cette dernière n'est clairement pas parallèle à l'axe des réels car sinon on aurait $\mathrm{Im}(z_A) = \mathrm{Im}(z_B)$ c'est à dire $2=0$: absurde.

Ainsi $\boxed{\text{la proposition ① est fausse}}$

(E) :

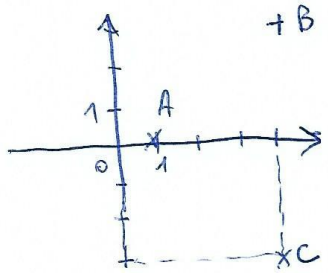
$(z-1)(-z^2+8z-25)=0 \iff \begin{cases} z=1 \\ \text{ou} \\ -z^2+8z-25=0 \end{cases}$ → équation du 2e degré avec $\begin{cases} a=-1 \\ b=8 \\ c=-25 \end{cases}$

$\Delta = b^2-4ac = 8^2-4\times(-1)\times(-25) = 64-100 = -36$.

$\Delta<0$, donc deux racines : $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \dfrac{-8-6i}{-2} = 4+3i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 4-3i$

donc $\boxed{\mathcal{S}_{(E)} = \{1 ; 4+3i ; 4-3i\}}$.

Soit $A(1)$; $B(4+3i)$ et $C(4-3i)$: Faisons un croquis :



Conjecture : ABC semble être rectangle en A.

Preuve : Méthode 1 (avec le produit scalaire).

$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A = 4+3i-1 = 3+3i$, donc $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

$z_{\vec{AC}} = z_C - z_A = 4-3i-1 = 3-3i$, donc $\vec{AC}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$

Par suite, $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = xx'+yy' = 3\times3+3\times(-3) = 9-9 = 0$, donc $\vec{AB}\perp\vec{AC}$, donc $(AB)\perp(AC)$ et ABC est un triangle rectangle en A ; la proposition ② est VRAIE

Méthode 2 : Avec la réciproque du théorème de Pythagore (

$AB = |z_B - z_A| = |3+3i| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18}$

$AC = |z_C - z_A| = |3-3i| = |\overline{3+3i}| = |3+3i| = \sqrt{18}$

$BC = |z_C - z_B| = |4-3i-(4+3i)| = |-6i| = 6$

D'une part : $BC^2 = 6^2 = 36$

D'autre part : $AB^2 + AC^2 = \sqrt{18}^2 + \sqrt{18}^2 = 18 + 18 = 36$.

Ainsi : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Donc d'après la réciproque du th. de Pythagore ABC est rectangle en A (et aussi isocèle en A).

La proposition ② est vraie –

$a \in \mathbb{R}$, $z^2 + 2az + a^2 + 1 = 0$.

$\Delta = (2a)^2 - 4(a^2+1) = 4a^2 - 4a^2 - 4 = -4$.

$\Delta < 0$, donc l'équation a deux solutions dans $\mathbb{C}$: $\begin{cases} z_1 = \dfrac{-2a-2i}{2} = -a-i \\ z_2 = \overline{z_1} = -a+i \end{cases}$

Ainsi z_1 et z_2 ne sont pas réelles car $\mathrm{Im}(z_1)$ et $\mathrm{Im}(z_2)$ sont égales à -1 (respectivement 1).

De plus, $z_2 = \overline{z_1}$, donc $|z_2| = |\overline{z_1}| = |z_1|$.

Ainsi $\boxed{\text{la proposition 3 est vraie}}$.

Posons $z = a + bi$ où a, b sont des réels.

$|z|^2 = a^2 + b^2$

Ainsi : $z + |z|^2 = 7 + i \iff a + bi + a^2 + b^2 = 7 + i \iff \begin{cases} a + a^2 + b^2 = 7 \\ b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1 \\ a + a^2 + 1 = \end{cases}$

$\iff \begin{cases} b = 1 \\ a^2 + a - 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ (solutions évidentes par a).

$\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \{-3+i ; 2+i\}$: Proposition ④ VRAIE.

$z^2 + z + 1 = 0$: la résolution avec $\Delta = -3$ conduit facilement à : deux conjugués ont même module

$\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \left\{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i ; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ et $\left|-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \left|-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$

La Proposition ⑤ est vraie –

Exercice III

1) $a \in \mathbb{C}^*$; $b \in \mathbb{C}^*$

*) $\dfrac{(a+b)^2}{ab} = \dfrac{a^2+2ab+b^2}{ab} = \dfrac{a^2}{ab} + \dfrac{2ab}{ab} + \dfrac{b^2}{ab} = \dfrac{a}{b} + 2 + \dfrac{b}{a}$.

Or $|a| = |b|$, donc comme $b \in \mathbb{C}^*$, $|b| \neq 0$, donc $\dfrac{|a|}{|b|} = 1$, donc $\left|\dfrac{a}{b}\right| = 1$.

Par suite, $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{U}$, donc $\dfrac{b}{a} \in \mathbb{U}$ car $\mathbb{U}$ est stable par inverse (cf. cours).

Ainsi, par définition de $\mathbb{U}$, $\dfrac{a}{b} \times \overline{\left(\dfrac{a}{b}\right)} = 1$ donc $\overline{\left(\dfrac{a}{b}\right)}$ est l'inverse de $\dfrac{a}{b}$, donc $\overline{\left(\dfrac{a}{b}\right)} = \dfrac{b}{a}$

Par suite, $\boxed{\dfrac{(a+b)^2}{ab}} = 2 + \dfrac{a}{b} + \overline{\left(\dfrac{a}{b}\right)} = \boxed{2 + 2\mathrm{Re}\left(\dfrac{a}{b}\right)}$ car $\forall z \in \mathbb{C}$, $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$.

donc $\boxed{\dfrac{(a+b)^2}{ab} \in \mathbb{R}}$ (somme de deux réels).

**) Si $|a| = |b| = 1$: alors $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} = \dfrac{1}{1} = 1$.

Or (cf. cours), $\forall z \in \mathbb{C}$, ***$|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, donc $\left|\mathrm{Re}\left(\dfrac{a}{b}\right)\right| \leq \left|\dfrac{a}{b}\right|$, donc $\left|\mathrm{Re}\left(\dfrac{a}{b}\right)\right| \leq 1$.

Par suite, $-1 \leq \mathrm{Re}\left(\dfrac{a}{b}\right) \leq 1$, donc $-2 \leq 2\mathrm{Re}\left(\dfrac{a}{b}\right) \leq 2$, donc $2 + 2\mathrm{Re}\left(\dfrac{a}{b}\right) \geq 0$.

D'après (*), $\dfrac{(a+b)^2}{ab} = 2 + 2\mathrm{Re}\left(\dfrac{a}{b}\right)$, donc $\boxed{\dfrac{(a+b)^2}{ab} \geq 0}$

*** Preuve : Si $z = x + yi$ avec x, y réels, $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ et $x = \mathrm{Re}(z)$.

Or $x^2 + y^2 \geq x^2$, donc par croissance de $\sqrt{\ }$ sur $\mathbb{R}_+$, $\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2}$ et $\sqrt{x^2} = \underbrace{|x|}_{\text{valeur absolue de } x}$.

Donc $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$.

2) $z \neq 0$ pour que $\dfrac{1}{z}$ existe.

Caractérisation des réels à l'aide du conjugué.

$\left(z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}\right) \iff \left(z + \dfrac{1}{z} = \overline{z + \dfrac{1}{z}}\right) \iff \left(z + \dfrac{1}{z} = \bar{z} + \dfrac{1}{\bar{z}}\right)$ par propriété du conjugué

$\left(z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}\right) \iff \left(z - \bar{z} = \dfrac{1}{\bar{z}} - \dfrac{1}{z}\right) \iff \left(z - \bar{z} = \dfrac{z - \bar{z}}{z\bar{z}}\right) \iff \left(z - \bar{z} = \dfrac{z - \bar{z}}{|z|^2}\right)$

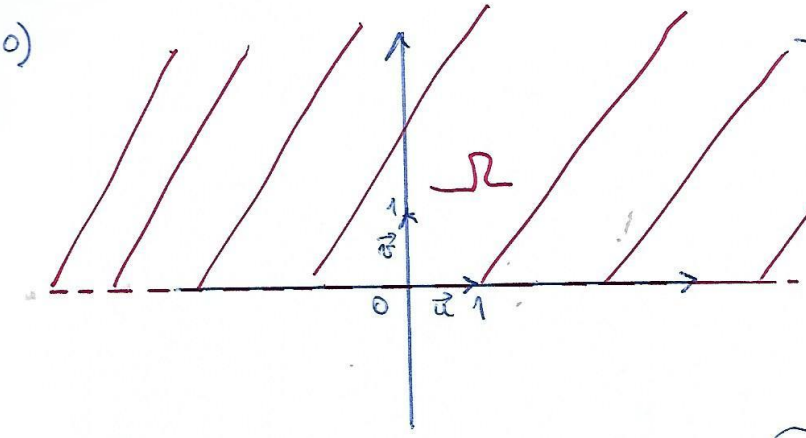
$\left(z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}\right) \iff \left(z - \bar{z}\right)\left(1 - \dfrac{1}{|z|^2}\right) = 0 \overset{\text{produit}}{\iff} \begin{cases} z = \bar{z} \\ z \neq 0 \end{cases}$ ou $1 - \dfrac{1}{|z|^2} = 0$

$\left(z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}\right) \iff \begin{cases} z = \bar{z} \\ z \neq 0 \end{cases}$ ou $|z|^2 = 1$ (or par positivité du module, $|z| = 1$).

Ainsi, $\boxed{\left(z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}\right) \iff z \in \mathbb{R}^* \text{ ou } |z| = 1}$ ($z = \bar{z}$ caractérise les réels).

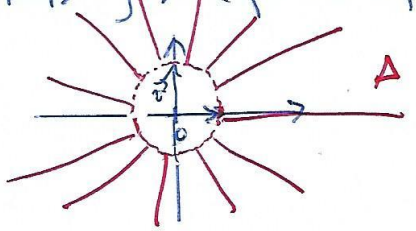
Exercice IV

0)



Ω est le demi-plan situé au-dessus de l'axe des réels (privé de l'axe des réels).

$\Delta = \{z \in \mathbb{C},\ |z| > 1\}$ est le plan entier privé du $\underbrace{\text{disque de centre O et de rayon 1}}_{\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}}$.



a) $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, donc $\mathrm{Im}(z) > 0$ et $z \neq 2i$

Posons $z = a + ib$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ et $(a;b) \neq (0;2)$:

$$\left|\frac{z+2i}{z-2i}\right| = \left|\frac{a+(b+2)i}{a+(b-2)i}\right| = \frac{|a+(b+2)i|}{|a+(b-2)i|} = \frac{\sqrt{a^2+(b+2)^2}}{\sqrt{a^2+(b-2)^2}}$$

Montrons que si $b > 0$, alors $a^2+(b+2)^2 > a^2+(b-2)^2$:

Or $a^2+(b+2)^2 = a^2+b^2+4+4b$ et $a^2+(b-2)^2 = a^2+b^2+4-4b$.

Vu que $b > 0$, $b > -b$, donc $4b > -4b$, donc $\underbrace{a^2+b^2+4+4b}_{a^2+(b+2)^2} > \underbrace{a^2+b^2+4-4b}_{a^2+(b-2)^2} > 0$ car $b \neq 2$

Donc

<u>Par stricte croiss-e de $\sqrt{\ }$ sur $\mathbb{R}_+$</u>, on a : $\sqrt{a^2+(b+2)^2} > \sqrt{a^2+(b-2)^2} > 0$

Donc $\dfrac{\sqrt{a^2+(b+2)^2}}{\sqrt{a^2+(b-2)^2}} > 1$

donc $\left|\dfrac{z+2i}{z-2i}\right| > 1$, donc $\boxed{\dfrac{z+2i}{z-2i} \in \Delta}$.

b) $f : \begin{cases} \Omega \setminus \{2i\} \longrightarrow \Delta \\ z \longmapsto f(z) = \dfrac{z+2i}{z-2i} \end{cases}$

Soit $b \in \Delta$: $f(z) = b \iff \dfrac{z+2i}{z-2i} = b$ et $z \neq 2i$

$f(z) = b \iff z+2i = b(z-2i)$ et $z \neq 2i$

$f(z) = b \iff z+2i = bz - 2bi$ et $z \neq 2i$

$f(z) = b \iff z(1-b) = -2i - 2bi = -2i(b+1)$ et $z \neq 2i$

$f(z) = b \iff z = \dfrac{-2i(b+1)}{1-b} = \dfrac{2(b+1)i}{b-1}$

$b \neq 1$ car $b \in \Delta$, donc $\mathrm{Im}(b) > 0$ et si $b = 1$, $\mathrm{Im}(b) = 0$: absurde -

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{2(b+1)}{b-1} i \right\}.}$$

c) Montrons que $\mathrm{Im}\left(\dfrac{2(b+1)}{b-1} i\right) > 0$ sachant que $b \in \Delta$, donc $|b| > 1$:

Or, $\dfrac{2(b+1)i}{b-1} = \dfrac{2(b+1)(\overline{b-1})i}{(b-1)(\overline{b-1})} = \dfrac{2(b+1)(\overline{b}-\overline{1})i}{|b-1|^2} = \dfrac{2(b+1)(\overline{b}-1)i}{|b-1|^2}$

$$\frac{2(b+1)i}{b-1} = \frac{2i}{|b-1|^2} \times (b\overline{b} - b + \overline{b} - 1) = \frac{2i}{|b-1|^2}(|b|^2 - 1 + \overline{b} - b)$$

Or $|b| > 1$, donc $|b|^2 > 1^2$ donc $|b|^2 - 1 > 0$ et $\overline{b} - b = -2i\,\mathrm{Im}(b)$

alors $\dfrac{2(b+1)i}{b-1} = \dfrac{2i}{|b-1|^2}(|b|^2 - 1 - 2i\,\mathrm{Im}(b)) = \dfrac{4\,\mathrm{Im}(b)}{|b-1|^2} + \dfrac{2(|b|^2-1)}{|b-1|^2} i$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Im}\left(\dfrac{2(b+1)i}{b-1}\right) = \dfrac{2(|b|^2-1)}{|b-1|^2}}$ avec $\begin{cases} |b|^2 - 1 > 0 \text{ car } |b| > 1. \\ 2 > 0 \\ |b-1|^2 > 0. \end{cases}$

Ainsi (produit et quotient de réels > 0) on a : $\mathrm{Im}\left(\dfrac{2(b+1)i}{b-1}\right) > 0$, donc

$\boxed{\dfrac{2(b+1)i}{b-1} \in \Omega}$ et de plus, si $\dfrac{2(b+1)}{b-1} = 2i$, alors $\dfrac{b+1}{b-1} = i$

Donc $b+1 = i(b-1)$ ($b \neq 1$ car $|b|>1$).

$b+1 = ib - i$

$b(1-i) = -1-i$

$$b = \frac{-1-i}{1-i} = \frac{(-1-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-(1+i)^2}{2} = \frac{-(1+2i-1)}{2} = -i$$

et $|b| = |-i| = 1$: absurde car $b \in \Delta$, donc $|b|>1$.

Ainsi $\omega \in \Omega$ et $z \neq 2i$, donc $\underline{\omega \in \Omega \setminus \{2i\}}$. où $\omega = \frac{2(b+1)}{b-1} i$

d) L'axe des imaginaires purs privé du point d'affixe $2i$ peut être vu comme l'ensemble suivant :

$\Gamma = \{ ki,\ k \in \mathbb{R} - \{2\} \}$.

Soit $k \in \mathbb{R} - \{2\}$: Calculons $f(ki)$:

$$f(ki) = \frac{ki+2i}{ki-2i} = \frac{(k+2)i}{(k-2)i} = \frac{k+2}{k-2} \text{ avec } \frac{k+2}{k-2} \in \mathbb{R}$$

Ainsi, $f(\Gamma) \subset \mathbb{R}$. L'étude des variations de $\gamma : \mathbb{R}\setminus\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \gamma(x) = \frac{x+2}{x-2}$ montre que les valeurs prises par γ appartiennent à $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ainsi, $\boxed{f(\Gamma) \subset \mathbb{R}\setminus\{1\}}$

<u>Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.</u> $f(z) = x \iff \frac{z+2i}{z-2i} = x \iff z+2i = (z-2i)x$ et $z \neq 2i$

$f(z) = x \iff z+2i = xz - 2xi$ et $z \neq 2i$

$\iff z(1-x) = -2i - 2xi = -2i(x+1)$

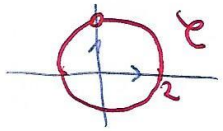
$\iff z = \frac{-2i(x+1)}{1-x} = \frac{2(x+1)}{x-1} i$, donc $\underline{z \in \Gamma}$ et $\mathbb{R}\setminus\{1\} \subset f(\Gamma)$.

$\frac{2(x+1)}{x-1} \neq 2$ sinon $\frac{x+1}{x-1} = 1$ et $-1 = 1$ absurde.

Ainsi, $\boxed{f(\Gamma) = \mathbb{R}\setminus\{1\}}$.

4 : pour la réciproque, sans refaire le calcul, on aurait pu utiliser <u>q b)</u> !

e) Soit $\mathcal{C} = \{ z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\} \,/\, |z| = 2 \}$.



Soit $M(z) \in \mathcal{C}$: $|z| = 2$ et $z \neq 2i$

Considérons $f(z) = \dfrac{z+2i}{z-2i}$

$2 \in \mathcal{C}$ et $f(2) = \dfrac{2+2i}{2-2i} = \dfrac{2(1+i)}{2(1-i)} = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{1+2i-1}{2} = i$

$-2 \in \mathcal{C}$ et $f(-2) = \dfrac{-2+2i}{-2-2i} = \dfrac{-1+i}{-1-i} = \dfrac{(-1+i)(-1+i)}{2} = \dfrac{1-i-i-1}{2} = -i$

$-2i \in \mathcal{C}$ et $f(-2i) = 0$

Ces quelques calculs d'image par f d'éléments de $\mathcal{C}$ permettent <u>de conjecturer que $f(\mathcal{C}) \subset i\mathbb{R}$</u>.

Soit z tel que : $|z| = 2$ et $z \neq 2i$. <u>Montrons $f(z) \in i\mathbb{R}$ en prouvant par exemple que</u>

<u>$\mathrm{Re}(f(z)) = 0$.</u> Or $f(z) = \dfrac{z+2i}{z-2i} = \dfrac{(z+2i)(\bar{z}+2i)}{(z-2i)(\bar{z}+2i)}$ (!) $\overline{z-2i} = \bar{z} - \overline{2i} = \bar{z} + 2i$ car $|z| = 2$ donc $|z|^2 - 4 = 0$

$$f(z) = \frac{z\bar{z} + 2i(z+\bar{z}) - 4}{|z-2i|^2} = \frac{|z|^2 - 4 + 2i(z+\bar{z})}{|z-2i|^2} = \frac{2i(z+\bar{z})}{|z-2i|^2}$$

$$f(z) = \frac{2i \times 2\mathrm{Re}(z)}{|z-2i|^2} = \frac{4\mathrm{Re}(z)\,i}{|z-2i|^2}$$

$z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$

: Ainsi $f(z) \in i\mathbb{R}$ et $\boxed{f(\mathcal{C}) \subset i\mathbb{R}}$