Exercice I

27 p 29

$z_1 = (3+i)^3 = (3+i)(3+i)^2 = (3+i)(9+6i+i^2) = (3+i)(8+6i) = 24+18i+8i-6$

$\boxed{z_1 = 18+26i}$

Méthode ② : $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, donc $z_1 = (3+i)^3 = 3^3+3\times3^2\times i+3\times3\times i^2+i^3$

$\boxed{z_1} = 27+27i-9-i = \boxed{18+26i}$

$z_2 = (3-2i)^3 = (3-2i)(3-2i)^2 = (3-2i)(9-12i-4) = (3-2i)(5-12i) = 15-36i-10i-24$

$\boxed{z_2 = -9-46i}$

Méthode ② : $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$; $z_2 = (3-2i)^3 = 3^3-3\times3^2\times2i+3\times3\times(2i)^2-(2i)^3$

$\boxed{z_2} = 27-54i-36-8i^3 = 27-36-54i+8i = \boxed{-9-46i}$

28 p 29

$z_1 = 3+2i \quad z_2 = -1+3i \quad z_3 = 1-i$

a) D'abord on détermine $z_1+z_2+z_3 = 3+4i$, donc $\underline{Re(z_1+z_2+z_3) = 3}$.

$iz_2 = i(-1+3i) = -i+3i^2 = -3-i$, donc $\underline{Re(iz_2) = -3}$.

⚠ $Re(iz_2) \neq Re(i)\times Re(z_2)$ comme j'ai pu le voir dans certains copies ...

$z_1^2 = (3+2i)^2 = 9+12i-4 = 5+12i$, donc $\underline{Re(z_1^2) = 5}$ (Rq : $Re(z_1^2) \neq (Re(z_1))^2$!)

b) $z_1-2z_2+\frac{1}{2}z_3 = 3+2i-2(-1+3i)+\frac{1}{2}(1-i) = 3+2i+2-6i+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i = \frac{11}{2}-\frac{9}{2}i$

donc $\underline{Im(z_1-2z_2+\frac{1}{2}z_3) = -\frac{9}{2}}$.

$z_1\times z_2 = (3+2i)(-1+3i) = -3+9i-2i-6 = -9+7i$, donc $\underline{Im(z_1\times z_2) = 7}$.

$z_2^2 = (-1+3i)^2 = 1-6i-9 = -8-6i$, donc $\underline{Im(z_2^2) = -6}$.

51. p.30. $z_1 = 2+i$; $z_2 = \sqrt{3} - i$

a) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(2+i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} = \frac{2\sqrt{3}+2i+i\sqrt{3}-1}{3+1}$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{3}-1}{4} + \frac{i(2+\sqrt{3})}{4}}$$

b) $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{2+i} + \frac{1}{\sqrt{3}-i} = \frac{2-i}{4+1} + \frac{\sqrt{3}+i}{3+1} = \frac{8-4i+5\sqrt{3}+5i}{20}$

$$\boxed{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{8+5\sqrt{3}}{20} + \frac{1}{20}i}$$

c) $\frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} = \frac{\sqrt{3}-2-2i}{\sqrt{3}+2} = \frac{(\sqrt{3}-2-2i)(\sqrt{3}-2)}{3-4} = \frac{3-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+4-2i\sqrt{3}+4i}{-1}$

$\frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} = \frac{-(7-4\sqrt{3} - i(2\sqrt{3}-4))}{1}$

$$\boxed{\frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} = -7+4\sqrt{3} + (2\sqrt{3}-4)i}$$

Oui

74 p.37.

b) $2iz - \bar{z} + 1 = 0$

Posons $z = a+ib$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et donc : $\bar{z} = a - ib$

Oui

Donc : $2i(a+ib) - (a-ib) + 1 = 0$

$2ai - 2b - a + ib + 1 = 0$

$-a + 1 - 2b + i(2a+b) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a+1-2b=0 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a+2-4b=0 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3b=0 \\ 2a+b=0 \end{cases}$ Oui

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2}{3} \\ a = -\frac{1}{3} \end{cases}$

$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \left\{-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} i\right\}}$ oui

75. page 31.

b) $\bar{z} + i = 2(z - i)$

Donc : $-2z + 2i + \bar{z} + i = 0$

$-2z + 3i + \bar{z} = 0$

Posons $z = a + bi$ avec $(a ; b) \in \mathbb{R}^2$ et donc : $\bar{z} = a - bi$

Donc : $-2(a + bi) + 3i + a - bi = 0$

$-a - 3bi + 3i = 0$

$-a + i(-3b + 3) = 0$

$\iff \begin{cases} -a = 0 \\ -3b + 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$

$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \{i\}}$

113 page 36.

$(2z + 1 - i)(i\bar{z} + i - 2) = 0$

$\iff 2z + 1 - i = 0$ ou $i\bar{z} + i - 2 = 0$

$z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$ ou $\bar{z} = \frac{2}{i} + 1 = \frac{2i}{-1} + 1$

$\bar{z} = 1 - 2i$

$z = 1 + 2i$

$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \left\{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i ; 1 + 2i\right\}}$ oui

118 page 36. $z \neq 0$

Posons $z = a + ib$ avec $(a ; b) \in \mathbb{R}^2$ et donc : $\bar{z} = a - ib$ et $a + bi \neq 0$

Ainsi : $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{a + ib}{a - ib} = \frac{(a + ib)(a + ib)}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2 + 2aib}{a^2 + b^2}$

car $a + bi \neq 0$ oui

LAGODIE-GORCIER Rémy

Exercice II : $\forall z \in \mathbb{C} - \{1\}$, $f(z) = \frac{2 - iz}{1 - z}$

1) Supposons par l'absurde que i possède un antecedent par f.

Alors : $f(z) = i \iff \frac{2 - iz}{1 - z} = i \iff 2 - iz = i - iz$ et $z \neq 1$

$f(z) = i \iff \boxed{2 = i}$

or, $2 \neq i$ car $i \notin \mathbb{R}$

Ainsi notre supposition initiale est fausse.

Donc i ne possède pas d'antécédents par f.

2) $Z \in \mathbb{C} - \{i\}$

Determinons ainsi le nombre de solution de l'équation :

(E) : $f(z) = Z$ d'inconnue z.

$f(z) = Z \iff \frac{2 - iz}{1 - z} = Z \iff 2 - iz = Z - Zz$ et $z \neq 1$

$f(z) = Z \iff z(Z - i) - Z + 2 = 0$ et $z \neq 1$

Donc : (E) : $\boxed{z = \frac{Z - 2}{Z - i}}$ car $Z \neq i$

Ainsi (E) admet une solution : $\frac{Z - 2}{Z - i}$ avec $Z \neq i$.

Donc si Z est different de i, Z admet un antecedent par f.

3-a) $f(z) = \frac{2 - iz}{1 - z}$

Posons $z = a + ib$ avec $(a ; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $(a ; b) \neq (1 ; 0)$

Donc : $f(z) = \frac{2 - i(a + ib)}{1 - a - ib}$

$f(z) = \frac{(2 - ia + b)(1 - a + ib)}{(1 - a)^2 + b^2} = \frac{2 - 2a + 2ib - ia + ia^2 + ab + b - ab - ib}{(1 - a)^2 + b^2}$

$$\boxed{f(z) = \frac{2 - 2a + b}{(1 - a)^2 + b^2} + i\frac{(2b - a + a^2 + b^2)}{(1 - a)^2 + b^2}}$$

3b) $f(z) \in i\mathbb{R} \iff Re(f(z)) = 0 \iff \frac{-2a+b+2}{(a-1)^2+b^2} = 0$ et $(a;b) \neq (1;0) \iff b = 2a-2$ et $a \neq 1$

donc $\boxed{z = a + (2a-2)i \text{ avec } a \neq 1}$. $(a \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$