Exercice I

Affirmation 1 : " Si $a \equiv b(n)$, alors $a^2 \equiv b^2(n^2)$ "

Fausse en témoigne le contre-exemple suivant : $a=1$; $b=11$; $n=10$: $1 \equiv 11\ (10)$ mais $1^2 \not\equiv 11^2\ (100)$

car $1^2 \equiv 1\ (100)$ et $11^2 = 121$ et $121 \equiv 21\ (100)$, donc $11^2 \equiv 21\ (100)$ et par suite, $1^2 \not\equiv 11^2\ (100)$.

Affirmation 2 : " Si $3a \equiv 3b\ (6n)$, alors $a \equiv b\ (2n)$ ".

Vraie : Si $3a \equiv 3b\ (6n)$, alors $6n \mid 3a-3b$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq $3a-3b = 6n \times k$

donc $3(a-b) = 6n \times k$

Donc $a-b = 2n \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc $2n \mid a-b$, donc $a \equiv b\ (2n)$.

Affirmation 3 : " $x^2+x+3 \equiv 0\ (5)$ " ssi $x \equiv 1\ (5)$.

Faux : Nous allons établir que si $x^2+x+3 \equiv 0\ (5)$, alors x n'est pas nécessairement congru à 1 modulo 5.

$\forall x \in \mathbb{Z}$, $x \equiv 0\ (5)$ ou $x \equiv 1\ (5)$ ou $x \equiv 2\ (5)$ ou $x \equiv 3\ (5)$ ou $x \equiv 4\ (5)$.

Faisons un tableau :

$x \equiv (5)$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv (5)$	0	1	4	4	1
$x+3 \equiv (5)$	3	4	0	1	2
$x^2+x+3 \equiv (5)$	3	0	1	0	3

Ainsi, $x^2+x+3 \equiv 0\ (5) \iff x \equiv 1\ (5)$ ou $x \equiv 3\ (5)$.

Affirmation 4 : " Le reste dans la D.E de 10^{2016} par 15 est égal à 6 ".

Faux :

$10 \equiv 10\ (15)$; $100 \equiv 10\ (15)$ car $100 = 15 \times 6 + 10$

donc $1000 = 100 \times 10 \equiv 10 \times 10 \equiv 10\ (15)$.

$10^1 \equiv 10\ (15)$; $10^2 \equiv 10\ (15)$; $10^3 \equiv 10\ (15)$. (*)

Par récurrence, prouvons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $10^n \equiv 10\ (15)$. Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $10^n \equiv 10\ (15)$.

L'initialisation a été vérifiée grâce à (*).

Hérédité : Soit n un entier fixé non nul. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, c'est à dire que $10^n \equiv 10\ (15)$.

Prouvons alors que $10^{n+1} \equiv 10\ (15)$.

Or, par hypothèse de récurrence, $10^n \equiv 10\ (15)$, donc $10^n \times 10 \equiv 10 \times 10\ (15)$ (compatibilité de $\equiv$ avec le produit).

donc $10^{n+1} \equiv 100\ (15)$ et $100 \equiv 10\ (15)$, donc $10^{n+1} \equiv 10\ (15)$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire, de sorte que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $10^n \equiv 10\ (15)$: le reste dans la D.E de 10^{2016} par 15 vaut donc 10 (on exclue la moinsité définitive [illegible])

Affirmation 5 : "$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2^n - 1$ n'est jamais divisible par 9".

Faux : Contre-exemple : pour $n=6$, $2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$; or $63 = 9 \times 7$, donc $9 \mid 2^6 - 1$.

Exercice II

Le piège est ici avec les années bissextiles : 2004, 2008, 2012 et 2016 le sont, donc chacune de ces années comporte 366 jours (à cause du 29 Février).

2000 n'est pas bissextile tout comme chacune des années 2001 ; 2002 ; 2003 ; 2005 ; 2006 ; 2007 ; 2009 ; 2010 ; 2011 ; 2013 ; 2014 et 2015.

On va compter combien de jours séparent le 15/06/2000 du 04/10/2016 ; puis en raisonnant modulo 7 on aura la réponse (les jours des semaines forment un cycle de longueur 7).

Juillet, Août, Octobre et Décembre ont 31 jours, tout comme Janvier, Mars, Mai.

Les autres mois ont 30 jours seulement ; sauf Février qui n'en a que 28 lors des années non bissextiles, et 29 sinon.

Du 15/06/2000 au 30/06/2000 : il y a 15 jours.
Du 01/07/2000 au 31/08/2000 : il y a $2 \times 31 = 62$ jours.
Du 01/09/2000 au 30/09/2000 : il y a 30 jours.
Du 01/10/2000 au 31/10/2000 : il y a 31 jours.
Du 01/11/2000 au 30/11/2000 : il y a 30 jours.
Du 01/12/2000 au 31/12/2000 : il y a 31 jours

} Total de 199 jours entre le 15/06/2000 et le 31/12/2000

Puis du 01/01/2001 au 31/12/2015 il y a en : $365 \times \overbrace{12}^{\text{nb. d'années non bissextiles entre ces dates}} + 366 \times \underbrace{3}_{\text{nb d'années bissextiles entre ces dates}} = 5478$ jours.

Enfin, du 01/01/2016 au 04/10/2016 il y a en : $\underbrace{31 \times 5}_{\text{Janvier ; Mars ; Mai ; Juillet ; Août}} + \underbrace{29}_{\text{Février !!}} + \underbrace{30 \times 3}_{\text{Avril - Juin - Sept.}} + \underbrace{4}_{\text{du 01/10 au 04/10 !}} = 278$ jours.

Au final, entre le 15/06/2000 et le 04/10/2016, se sont écoulés : $N = 199 + 5478 + 278 = 5955$ jours.

Enfin :

$$\begin{array}{r|l} 5955 & 7 \\ 35 & \\ 05 & \\ 5 & \end{array}$$

donc $5955 = 7 \times 850 + 5$.

798 semaines entières et 5 jours se sont écoulés depuis le 15/06/2000 jusqu'au Mardi 04/10/2016.

Ainsi, 5 jours après le jour de la semaine cherché, nous sommes un Mardi.

Donc le jour cherché est un Jeudi.

Le 15/06/2000 était donc un Jeudi. (On peut vérifier sur un calendrier d'époque).

Exercice III

$7^0 = 1$ et $1 \equiv 1 (10)$, donc $7^0 \equiv 1 (10)$.

$7^1 = 7$ et $7 \equiv 7 (10)$, donc $7^1 \equiv 7 (10)$.

$7^2 = 49$ et $49 \equiv 9 (10)$, donc $7^2 \equiv 9 (10)$.

$7^3 = 343$ et $343 \equiv 3 (10)$, donc $7^3 \equiv 3 (10)$.

$7^4 = 7^3 \times 7$ et $7^3 \equiv 3 (10)$ et $7 \equiv 7 (10)$, donc $7^4 \equiv 3 \times 7 \equiv 21 \equiv 1 (10)$.

A partir de là : $7^5 \equiv 7 (10)$; $7^6 \equiv 9 (10)$ ....

Effectuons la D.E de n par 4 : $\exists! (q;r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que : $n = 4q + r$ avec $0 \leq r < 4$.

donc $r \in \{0;1;2;3\}$.

*) S'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 4q$ i.e si $n \equiv 0 (4)$, alors $7^n = 7^{4q} = (7^4)^q$.

or $7^4 \equiv 1 (10)$, donc $(7^4)^q \equiv 1^q \equiv 1 (10)$ par compatibilité de la congruence avec les puissances.

Ainsi, si $n \equiv 0 (4)$, alors $7^n \equiv 1 (10)$.

**) Si $n \equiv 1 (4)$ i.e s'il existe $q \in \mathbb{N}$ tq : $n = 4q+1$, alors $7^n = 7^{4q+1} = (7^4)^q \times 7$

or $(7^4)^q \equiv 1 (10)$, donc $7^n \equiv 7 (10)$.

***) Si $n \equiv 2 (4)$ i.e s'il existe $q \in \mathbb{N}$ tq : $n = 4q+2$, alors $7^n = 7^{4q+2} = 7^{4q} \times 7^2$

or $7^{4q} \equiv 1 (10)$ et $7^2 \equiv 9 (10)$, donc $7^n \equiv 9 (10)$.

****) Enfin, par le même raisonnement, si $n \equiv 3 (4)$, alors $7^n \equiv 3 (10)$.

Résumé :

$n \equiv (4)$	0	1	2	3
$7^n \equiv (10)$	1	7	9	3

On a : $2017 \equiv 7 (10)$, donc par compatibilité de la relation de congruence avec les puissances :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $2017^n \equiv 7^n (10)$.

Grâce au tableau précédent, on conclut donc :

$n \equiv (4)$	0	1	2	3
$7^n \equiv (10)$	1	7	9	3

Vu qu'en base 10, tout entier est conjugué à son chiffre des unités il en résulte que :

Si $n \equiv 0 (4)$, alors l'écriture décimale de 2017^n se termine par le chiffre 1.

Si $n \equiv 1 (4)$, ——————————— 7.

Si $n \equiv 2 (4)$, ——————————— 9.

Si $n \equiv 3 (4)$, ——————————— 3.

Exercice IV $n \in \mathbb{N}$, notons $A(n) = 5^{2n} - 14^n$.

a) $5^{2n} = (5^2)^n = 25^n$. Or, $25 \equiv 3\ (11)$ et $14 \equiv 3\ (11)$, donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $25^n \equiv 3^n\ (11)$ et $14^n \equiv 3^n\ (11)$, donc $25^n - 14^n \equiv 3^n - 3^n\ (11) \equiv 0\ (11)$ par compatibilité de la relation de congruence avec la soustraction. Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A(n) \equiv 0\ (11)$ i.e $A(n)$ est un multiple de 11.

b) Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $5^{2n} - 14^n$ est un multiple de 11 i.e $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $5^{2n} - 14^n = 11k$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $5^{2n} - 14^n = 5^{2\times 0} - 14^0 = 5^0 - 14^0 = 1 - 1 = 0 = 11 \times 0$. ($k = 0$ et $0 \in \mathbb{Z}$).
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit ℓ un entier fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(\ell)$ est vraie, à savoir qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $5^{2\ell} - 14^\ell = 11k$. (H. récurrence)
Prouvons alors que $\mathcal{P}(\ell+1)$ est vraie, c'est à dire qu'il existe un entier $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que : $5^{2(\ell+1)} - 14^{\ell+1} = 11\lambda$.

Or, $5^{2\ell+2} - 14^{\ell+1} = 5^{2\ell} \times 5^2 - 14^{\ell+1} = 5^{2\ell} \times 25 - 14^{\ell+1}$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $5^{2\ell} = 14^\ell + 11k$.

Donc : $5^{2\ell+2} - 14^{\ell+1} = (14^\ell + 11k) \times 25 - 14^{\ell+1}$. De plus, $25 = 14 + 11$, donc :

$$5^{2\ell+2} - 14^{\ell+1} = (14^\ell + 11k) \times (14 + 11) - 14^{\ell+1}$$

$$5^{2\ell+2} - 14^{\ell+1} = \cancel{14^{\ell+1}} + 11 \times 14^\ell + 11k \times 14 + 11k \times 11 - \cancel{14^{\ell+1}}$$

$$5^{2\ell+2} - 14^{\ell+1} = 11 \times (14^\ell + 14k + 11k) = 11 \times (25k + 14^\ell)$$

Or $k \in \mathbb{Z}$, donc $25k \in \mathbb{Z}$
$\ell \in \mathbb{N}$ donc $14^\ell \in \mathbb{N}$
donc $25k + 14^\ell \in \mathbb{Z}$.

Par suite, $5^{2\ell+2} - 14^{\ell+1} = 11 \times \lambda$ avec $\lambda = 25k + 14^\ell$ et $\lambda \in \mathbb{Z}$.
Donc $\mathcal{P}(\ell+1)$ est vraie !

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\ell)$ est héréditaire.
Donc d'après le principe de récurrence, $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\ell)$ est vraie i.e. $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $5^{2\ell} - 14^\ell$ est un multiple de 11.

c) $$(a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = a \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} - b \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

$$S = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}.$$

$$S = \left(a b^{n-1} + a^2 b^{n-2} + \dots + a^n b^0\right) - \left(a^0 b^n + a^1 b^{n-1} + \dots + a^n b^1\right)$$

$$S = a^n b^0 - a^0 b^n = a^n - b^n$$
$(b^0 = a^0 = 1)$.

car chacune des sommes entre parenthèses ont tous les termes en commun sauf $a^n b^0$ et $a^0 b^n$ qui figurent respectivement dans la 1re somme (resp. la 2e) et pas dans l'autre. Il y a simplification TELESCOPIQUE

$5^{2n} - 14^n = (5^2)^n - 14^n = 25^n - 14^n = (25-14) \times \sum_{k=0}^{n-1} 25^k \times 14^{n-1-k}$ d'après l'identité que l'on a établie ! 5

$5^{2n} - 14^n = 11 \times \sum_{k=0}^{n-1} 25^k \times 14^{n-1-k} = 11 \times \lambda$ avec $\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} 25^k \times 14^{n-1-k}$

$\lambda \in \mathbb{N}$ car $25 \in \mathbb{N}$, donc $25^k \in \mathbb{N}$, $14 \in \mathbb{N}$, donc $14^{n-1-k} \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$ est stable par addition et multiplication.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $5^{2n} - 14^n$ est un multiple de 11 ■

Les méthodes (a) et (c) sont à privilégier car très rapides !

Exercice V

1) $14x^2 + 7y^2 = 10^n$ $\quad x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.

$7(2x^2 + y^2) = 10^n$.

Si $n = 0$, alors $7(2x^2+y^2) = 1$ avec $2x^2 + y^2 \in \mathbb{N}$, donc $7 | 1$: impossible.

Si $n \neq 0$, alors en raisonnant modulo 7 : $14x^2 \equiv 0\ (7)$ car $14 \equiv 0\ (7)$ et $7 \equiv 0\ (7)$.

Donc $14x^2 + 7y^2 \equiv 0\ (7)$ (compatibilité de $\equiv$ avec l'addition).

Or, si $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ est solution de (*), alors $14x^2 + 7y^2 \equiv 10^n\ (7)$.

Par suite on aurait : $10^n \equiv 0\ (7)$ par transitivité de $\equiv$.

Ainsi $7 | 10^n$, et donc $7 | 10$: absurde ! En conclusion, (*) n'a aucune solutions entières !

2) $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ (#)

a) Si $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ est solution de #, alors $3x^2 + 7y^2 \equiv 10^{2n}\ (7)$.

Or, $10^{2n} = (10^2)^n = 100^n$ et $100 \equiv 2\ (7)$, donc $10^{2n} \equiv 2^n\ (7)$.

$7 \equiv 0\ (7)$, donc $7y^2 \equiv 0\ (7)$.

Par suite, $3x^2 + 7y^2 \equiv 10^{2n}\ (7)$ s'écrit donc : $3x^2 \equiv 2^n\ (7)$.

b)

$x \equiv (7)$	0	1	2	3	4	5	6
$x^2 \equiv (7)$	0	1	4	2	2	4	1
$3x^2 \equiv (7)$	0	3	5	6	6	5	3

c) $\left.\begin{array}{l} 2^0 \equiv 1\ (7) \\ 2^1 \equiv 2\ (7) \\ 2^2 \equiv 4\ (7) \\ 2^3 \equiv 1\ (7) \end{array}\right\}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. $\exists!\,(q;r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que : $n = 3q + r$ avec $0 \leq r < 3$.

$\begin{cases} \text{Si } n = 3q, \text{ alors : } 2^n = 2^{3q} = (2^3)^q \equiv 1^q\ (7) \equiv 1\ (7). \\ \text{Si } n = 3q+1, \text{ alors : } 2^n = 2^{3q+1} = (2^3)^q \times 2^1 \equiv 1^q \times 2\ (7) \equiv 2\ (7) \\ \text{Si } n = 3q+2, \text{ alors : } 2^n = 2^{3q+2} = (2^3)^q \times 2^2 \equiv 1^q \times 4\ (7) \equiv 4\ (7). \end{cases}$

Ainsi $2^n \equiv 1\ (7)$ ou $2^n \equiv 2\ (7)$ ou $2^n \equiv 4\ (7)$.

d) Grâce à a), si $(x;y)$ est solution de (#), alors $3x^2 \equiv 2^n\ (7)$.

b) et c) montrent que $3x^2$ et 2^n n'ont jamais le même reste dans la div. par 7. Par suite, $3x^2 \not\equiv 2^n\ (7)$.

Donc par contraposée la " Si $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ est solution de #, alors $3x^2 \equiv 2^n (7)$ "

on obtient : Si $3x^2 \not\equiv 2^n (7)$, alors $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ n'est pas solution de (#).

Comme $3x^2 \not\equiv 2^n (7)$, il en résulte que tout couple $(x;y)$ d'entiers n'est pas solution de (#).

(#) n'a donc aucune solution entière !

Exercice VI

1) M est la lettre de rang $x = 12$.

Or $3x+8 = 3\times12+8 = 44$ et 44 a pour reste 18 dans la D.E par 26.

Ainsi $y = 18$ et M est donc codé en la lettre S.

A a pour rang 0, et $3\times0+8 = 8$ qui a pour reste 8 dans la D.E par 26. $y = 8$ et A est donc codé en la lettre I.

T a pour rang 19, et $3\times19+8 = 65$ qui a pour reste 13 dans la D.E par 26. $y = 13$ et T est codé en la lettre N.

H a pour rang 7, et $3\times7+8 = 29$ qui a pour reste 3 dans la D.E par 26. $y = 3$ et H est codé par la lettre D.

Ainsi le mot "MATH" est codé en le mot : "SIND".

2) y est le reste dans la D.E de $3x+8$ par 26.

(V) Donc $\exists!\, q\in\mathbb{N}$ tel que : $3x+8 = 26q+y$ avec : $0\leq y<26$.

De même, y' est le reste dans la D.E de $3x'+8$ par 26, donc $\exists!\, q'\in\mathbb{N}$ tel que : $3x'+8 = 26q'+y'$ avec : $0\leq y'<26$.

Supposons que $y=y'$: On a donc $3x+8-26q = 3x'+8-26q'$

Donc $3x-3x' = 26q-26q' = 26(q-q')$ avec $q-q'\in\mathbb{Z}$.

Comme $26\equiv0\ (26)$ et que $q-q'\in\mathbb{Z}$, on a : $26(q-q')\equiv0\ (26)$.

Par suite $3x-3x'\equiv0\ (26)$, donc $3x\equiv3x'\ (26)$.

(V) On a : $3x\equiv3x'\ (26)$, donc $3x-3x'\equiv0\ (26)$, donc $3(x-x')\equiv0\ (26)$.

De plus : $\left.\begin{array}{l}0\leq x<26\\ 0\leq x'<26 \text{ donc } -26<-x'\leq0\end{array}\right\}$ Donc : $-26<x-x'<26$ (on a additionné membre à membre ces deux inégalités).

Par suite, comme $3>0$: $-26\times3<3(x-x')<26\times3$.

Donc : $-78<3(x-x')<78$.

Vu que $3(x-x')\equiv0\ (26)$ et que $-78<3(x-x')<78$, $3(x-x')$ est égal à l'un des multiples de 26 suivants : $-52;-26;0;26;52$ (qui sont les seuls multiples de 26 compris dans $]-78;78[$) !

Par suite : $3(x-x')\in\{-52;-26;0;26;52\}$.

Il est impossible d'avoir $3(x-x')=\pm52$ ou $3(x-x')=\pm26$, car $3\nmid52$ et $3\nmid26$.

Donc nécessairement, $3(x-x')=0$, et donc $x-x'=0$ donc $x=x'$.

Ainsi, en contraposant cela équivaut à dire que : Si $x\neq x'$, alors $y'\neq y$ c'est à dire que deux lettres distinctes sont codés par deux lettres distinctes également.

3) a) $y \equiv 3x+8\ (26) \iff x \equiv 9y+6\ (26)$.

($\Rightarrow$) On suppose que $y \equiv 3x+8\ (26)$.

Alors : $9y \equiv 9(3x+8)\ (26)$ par compatibilité de $\equiv$ avec le produit.

Donc $9y \equiv 27x+72\ (26)$.

Or $27 \equiv 1\ (26)$, donc $27x \equiv x\ (26)$

et $72 \equiv -6\ (26)$

donc $9y \equiv x-6\ (26)$, donc $x \equiv 9y+6\ (26)$ (compatibilité de $\equiv$ avec l'addition).

($\Leftarrow$) On suppose que $x \equiv 9y+6\ (26)$.

Alors : $3x \equiv 3(9y+6)\ (26)$ i.e $3x \equiv 27y+18\ (26)$.

Or $27 \equiv 1\ (26)$, donc $27y \equiv y\ (26)$ et $18 \equiv -8\ (26)$, par suite : $3x \equiv y-8\ (26)$

et donc $y \equiv 3x+8\ (26)$.

Ainsi on a bien, par double implication, établi que : $y \equiv 3x+8\ (26) \iff x \equiv 9y+6\ (26)$.

b) "ODGUV"

On a pour rang $y=14$.

Grâce à (3a), elle est décodée par une lettre de rang x avec : $x \equiv 9y+6\ (26)$

i.e $x \equiv 9\times 14+6\ (26)$

i.e $x \equiv 132\ (26)$, donc $x \equiv 2\ (26)$.

Vu que $0 \leq x < 25$ et $x \equiv 2\ (26)$, on a donc : $x=2$ qui correspond à la lettre C.

O provient donc du cryptage de la lettre C par ce codage.

Les calculs simples et similaires conduisent à : D du message provient de la lettre H

G ——— I

U ——— E

V ——— N

"ODGUV" est donc la transcription codée du mot "CHIEN" (ouaf, ouaf, ouaf !!).

Exercice VII

1) $10 = 1\times 3^2 + 1\times 3^0$. Ainsi $10 = \overline{101}^{(3)}$.

$48 = 16\times 3 = (3\times 5+1)\times 3 = 3^2\times 5+3 = 3^2\times(3+2)+3 = 3^3+3^2\times 2+3$.

Donc $48 = 1\times 3^3+2\times 3^2+1\times 3^1+0\times 3^0$ ainsi $48 = \overline{1210}^{(3)}$

$235 = 78\times 3+1 = 3\times(25\times 3+3)+1 = 3((8\times 3+1)\times 3+3)+1$.

$235 = 3(((2\times 3+2)\times 3+1)\times 3+3)+1 = 3^2(2\times 3^2+2\times 3+1)+3^2+1$.

$235 = 2\times 3^4+2\times 3^3+2\times 3^2+0\times 3^1+1$

Ainsi : $235 = \overline{22201}^{(3)}$

2)
$$\begin{array}{r} {}^{1}{}^{1}\;{}^{1}\;{}^{1}\;{}^{1}\;{}^{1}\;{}^{1}\;{}^{1} \\ 1022112 \\ +\;\;111002 \\ \hline 1210121 \end{array}$$

$\overline{1022112}^{(3)} + \overline{111002}^{(3)} = \overline{1210121}^{(3)}$.

Cette somme vaut en base 10 : $1\times 3^0+2\times 3^1+1\times 3^2+0\times 3^3+1\times 3^4+2\times 3^5+1\times 3^6$.

c'est à dire : $1+6+9+81+486+729 = 1312$

3) $n = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0}^{(b)}$
$= 3a_0 + 3^2\times a_1 + \cdots + 3^{k-1}\times a_{k-1} + 3^k\times a^k$

Ainsi, en base 10, $n = \sum_{j=0}^{k} a_j\times 3^j$

4) a) Facile !

b) Les affichages successifs de R dans la boucle donnent les chiffres du nombre N lus de DROITE À GAUCHE !!

c) $N\geq 1$ et $2\leq b\leq 10$, donc $\mathrm{Ent}\left(\frac{N}{b}\right)\geq 0$, donc $\frac{N}{10}\leq\frac{N}{b}\leq\frac{N}{2}$, donc $\mathrm{Ent}\left(\frac{N}{b}\right)\leq\frac{N}{2}$.

Par suite, $Q\leq\frac{N}{2}<N$, donc $Q<N$.
(car $N\in\mathbb{N}^*$).

En appliquant l'axiome à la suite des nombres formés par les différentes valeurs de N mémorisées à chaque boucle, on obtient une suite d'entiers strictement décroissante : il existe donc un rang à partir duquel $N=0$ ce qui assure que le programme va se terminer (Fin du Tant que dès que $N=0$).

d) Ici $b=2$. L'algorithme donné convertit en base 2 l'entier N écrit en base 10 en entrée.

On obtient sans peine :

$$\overline{943}^{(10)} = \overline{1110101111}^{(2)}$$

Exercice VIII

$E = \{9 + a^2 ; a \in \mathbb{N}^*\}$.

a) $n \geq 3$.

$3 \equiv -1\ (4)$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^n \equiv (-1)^n\ (4)$ par compatibilité de la relation de congruence avec les puissances.

Or, si n est pair, $(-1)^n = 1$ et si n est impair, $(-1)^n = -1$.

Par suite on a bien : pour tout entier $n \geq 3$, $\underbrace{3^n \equiv 1\ (4)}_{(\text{ssi } n \text{ est pair})}$ ou $3^n \equiv -1\ (4)$. Vu que $3 \equiv -1\ (4)$ on a : $\underbrace{3^n \equiv 3\ (4)}_{(\text{ssi } n \text{ est impair})}$ (Transitivité de $\equiv$).

b) Soit $a \in \mathbb{N}$ une solution de l'équation : $a^2 + 9 = 3^n$.

Donc $a^2 + 9 \equiv 3^n\ (2)$. Or $9 \equiv 1\ (2)$ et $3 \equiv 1\ (2)$, donc $3^n \equiv 1\ (2)$.

Par suite on a : $a^2 + 9 \equiv a^2 + 1\ (2)$ et $3^n \equiv 1\ (2)$, donc $a^2 + 1 \equiv 1\ (2)$

Donc $a^2 \equiv 1 - 1\ (2)$ i.e $a^2 \equiv 0\ (2)$ par compatibilité de $\equiv$ avec la soustraction.

Ainsi $2 \mid a^2$, donc a^2 est pair, et par suite (cf. exercice fait en classe) a est pair.

a est pair, donc $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2k$, donc $a^2 = 4k^2$, donc $a^2 \equiv 0\ (4)$ et $9 \equiv 1\ (4)$

Par suite, $a^2 + 9 \equiv 1\ (4)$.

Or $a^2 + 9 = 3^n \Longrightarrow a^2 + 9 \equiv 3^n\ (4)$ } Ainsi on doit avoir : $3^n \equiv 1\ (4)$.

D'après la question a) $3^n \equiv 1\ (4)$ ssi n est pair.

Donc si a est solution de cette équation, alors n est nécessairement pair

c) $n = 2p$ avec p entier et $p \geq 2$.

$3^n - a^2 = 3^{2p} - a^2 = (3^p)^2 - a^2 = (3^p - a)(3^p + a)$ (ah les identités remarquables !) $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$.

Si a est solution de (E), alors : $3^n - a^2 = 9$, donc $(3^p - a)(3^p + a) = 9$.

Or $a \in \mathbb{N}^*$, donc $\underbrace{3^p - a}_{\in \mathbb{N}} < \underbrace{3^p + a}_{\in \mathbb{N}}$: la seule décomposition de 9 en produits de deux entiers $x \times y$ avec $x < y$ est 1×9

Donc : $\begin{cases} 3^p - a = 1 \\ 3^p + a = 9 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ \text{et} \\ 3^p = 5 \end{cases}$ impossible car $p \geq 2$, donc $3^p \geq 9$! Donc (E) n'a aucune solution entière.