Maths Expertes Groupe 1 — Corrigé du contrôle de leçon — 02/10/2023

Exercice I

1) $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$. Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est déterminer l'unique couple d'entiers $(q;r)$ tel que : $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.

2) $d \in \mathbb{Z}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$
d est un diviseur de a s'il existe un entier relatif k tel que : $a = kd$.

3a) Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$.
On appelle combinaison linéaire des entiers a et b tout entier de la forme $au + bv$, où u et v sont des entiers relatifs quelconques.

b) $d \in \mathbb{Z}^*$. d divise a, donc $a = kd$ avec $k \in \mathbb{Z}$
d divise b, donc $b = ld$ avec $l \in \mathbb{Z}$.

Par suite, pour tout couple d'entiers $(u;v)$, $au + bv = kdu + ldv = d(ku + lv)$

Or $ku + lv \in \mathbb{Z}$ car $\mathbb{Z}$ est stable par addition et multiplication.

Donc d divise $au + bv$, bref $\boxed{\text{d divise toute CBL des entiers a et b}}$

c) $6024 \,|\, 3$; $\boxed{0}$; 2008 ; Donc $3 | 6024$ car le reste est nul.

De même : $171 \,|\, 3$; $\boxed{0}$; 57 Donc $3 | 171$.

D'après 3b) appliqué à : $a = 6024$; $b = 171$; $u = 6024$ et $v = 89$, comme $3 | 6024$ et $3 | 171$, 3 divise la CBL suivante : $6024 \times 6024 + 171 \times 89$, Bref $\boxed{3 \,|\, (6024^2 + 171 \times 89)}$

d) $n \in \mathbb{N}^*$.
$n | (5n+1)$ et $n | 5n$ car $5n$ est un multiple de n.
Donc n divise la CBL (différence ici) suivante : $5n + 1 - 5n = 1$.
$n | 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\boxed{n = 1}$ (l'unique diviseur dans $\mathbb{N}$ de 1 est 1).

Exercice II

$n \in \mathbb{Z}$ et $5 | (n-4)$, donc il existe k entier tel que : $n - 4 = 5k$, et par suite, $n = 5k + 4$.

Donc $n^2 - 1 = (5k+4)^2 - 1 = (5k+4+1)(5k+4-1)$ | (Identité remarquable $A^2 - B^2$ avec $A = 5k+4$; $B = 1$ et $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$.

$n^2 - 1 = (5k+5)(5k+3) = 5(k+1)(5k+3)$. Posons $l = (k+1)(5k+3)$

$n^2 - 1 = 5l$ avec $l \in \mathbb{Z}$ car $\mathbb{Z}$ est stable par addition et multiplication

Donc $\boxed{n^2 - 1 \text{ est un multiple de } 5}$.