Lagodié
Garlier
Rémy

DM n°8 de mathématiques expertes.

Exercice I :

18 page 79 :

a) $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2\times3}-\sqrt{2}}{4}$

$$\boxed{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}$$

$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3\times2}}{4}$

$$\boxed{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}$$

b) $2\times\frac{5\pi}{24} = \frac{5\pi}{12}$

D'une part : $\cos\left(2\times\frac{5\pi}{24}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

Donc : $2\cos^2\left(\frac{5\pi}{24}\right) - 1 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{5\pi}{24}\right) = \frac{1}{8}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}+4\right)$

De plus $\frac{5\pi}{24} \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ donc : $\cos\left(\frac{5\pi}{24}\right) > 0$

Donc : $\cos\left(\frac{5\pi}{24}\right) = \frac{1}{\sqrt{8}}\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{2}+4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{2}+4}$

$$\boxed{\cos\left(\frac{5\pi}{24}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}+8}}$$

D'autre part : $\cos\left(2\times\frac{5\pi}{24}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

Donc : $1-2\sin^2\left(\frac{5\pi}{24}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) \Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{5\pi}{24}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

Or, $\frac{5\pi}{24} \in]0;\pi[$ donc : $\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right) > 0$.

Par suite : $\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}+4-\sqrt{6}}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{2(\sqrt{2}+4-\sqrt{6})}$$

Ainsi : $\boxed{\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{2}-2\sqrt{6}+8}}$

<u>34 page 80</u>

$\forall k \in [\![1;4]\!],\ P_k(p_k)$

Graphiquement : $|p_1| = 2$ et $\mathrm{Re}(p_1) = 1$ donc : $\cos\theta = \frac{1}{2}$ avec $\theta = \arg(p_1)\ [2\pi]$

Or, $\mathrm{Im}(p_1) > 0$ et $|p_1| > 0$ donc $\sin(\theta) > 0$ car : $\theta = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ Donc : $\theta = \frac{\pi}{3}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Donc : $\boxed{p_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}}$

De meme : $p_2 = 4 = 4\times 1$.

$$\boxed{p_2 = 4e^{i0}}$$

$|p_3| = 2$ et $\arg(p_3) = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

Donc : $\boxed{p_3 = 2e^{3i\frac{\pi}{4}}}$

$|p_4| = 2$ et $\arg(p_4) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

Donc : $\boxed{p_4 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

42 page 80 :

b) $|(1-i\sqrt{3})^2| = |1-i\sqrt{3}|^2 = 4$

$\arg((1-i\sqrt{3})^2) = 2\arg(1-i\sqrt{3}) = -2\times\frac{\pi}{3}$

Donc : $\boxed{(1-i\sqrt{3})^2 = 4\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 4e^{-2i\frac{\pi}{3}}}$

30 page 81 :

$z = 3e^{-i\frac{\pi}{10}}$

$z' = 6e^{i\frac{\pi}{4}}$

Donc : $\boxed{zz'} = 18e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{10}\right)} = \boxed{18e^{i\frac{3\pi}{20}}}$

$\boxed{\frac{z}{z'}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{10}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{10}\right)} = \boxed{\frac{1}{2}e^{-i\frac{7\pi}{20}}}$

$\boxed{z^5} = 3^5 e^{-5i\frac{\pi}{10}} = \boxed{243e^{-i\frac{\pi}{2}}}$

81 page 81 : $z = -2e^{i\frac{\pi}{4}}$

a) $z = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

$\boxed{z = -\sqrt{2}(1+i)}$

b) $z = -2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)}$.

$$\boxed{z = 2e^{5i\frac{\pi}{4}}}$$

c) $\boxed{A} = z^8 = 2^8 e^{8\times\frac{5i\pi}{4}} = 256 e^{10i\pi} = \boxed{256}$

$\boxed{B} = (z+\bar{z})^2 = (2\mathrm{Re}(z))^2 = 4(-\sqrt{2})^2 = \boxed{8}$

$\boxed{C} = (z + i\sqrt{2})^2 = (-\sqrt{2} - i\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2 = (-\sqrt{2})^2 = \boxed{2}$

100 page 88 :

$P = e^{i\frac{\pi}{14}} \times e^{i\frac{\pi}{7}} \times e^{i\frac{3\pi}{14}} \times e^{i\frac{2\pi}{7}} \times e^{i\frac{5\pi}{14}} \times e^{i\frac{2\pi}{7}} = e^{i\left(\frac{\pi}{14}+\frac{3\pi}{14}+\frac{5\pi}{14}\right)} \times e^{i\left(\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{7}+\frac{3\pi}{7}\right)}$

$P = e^{i\frac{9\pi}{14}} \times e^{i\frac{6\pi}{7}} = e^{i\left(\frac{9\pi}{14}+\frac{12\pi}{14}\right)} = e^{i\frac{21\pi}{14}} = e^{i\left(\pi+\frac{7\pi}{14}\right)} = e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{2}} = -e^{i\frac{\pi}{2}}$

$P = -i$

donc : $\boxed{e^{i\frac{\pi}{14}} \times e^{i\frac{\pi}{7}} \times e^{i\frac{3\pi}{14}} \times e^{i\frac{2\pi}{7}} \times e^{i\frac{5\pi}{14}} \times e^{i\frac{3\pi}{7}} = -i}$

69 page 82 :

D'une part : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2x)\sin^2(x) = \dfrac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2} \times \dfrac{(e^{ix}-e^{-ix})^2}{-4}$

$\cos(2x)\sin^2(x) = (e^{2ix}+e^{-2ix})(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}) \times -\frac{1}{8}$

$\cos(2x)\sin^2(x) = -\frac{1}{8}(e^{4ix} - 2e^{2ix} + 1 + 1 - 2e^{-2ix} + e^{-4ix})$

(*) $\cos(2x)\sin^2(x) = -\frac{1}{8}(e^{4ix} + e^{-4ix} - 2e^{2ix} - 2e^{-2ix} + 2)$

D'autre part : $\forall x \in \mathbb{R},\ -\frac{1}{4}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4} = -\dfrac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{8} + \dfrac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{4} - \dfrac{1}{4}$

$-\frac{1}{4}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}(e^{4ix} + e^{-4ix} - 2e^{2ix} - 2e^{-2ix} + 2)$

Donc d'après (*) : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2x)\sin^2(x) = -\frac{1}{4}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4}}$

Lagadic-Coulier Rémy

Soit F une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \cos(2x)\sin^2(x)$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(2x)\sin^2(x) = -\frac{1}{4}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4}$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{16} \times 4\cos(4x) + \frac{1}{4} \times 2\cos(2x) - \frac{1}{4}$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{F(x) = -\frac{1}{16}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{4}x}$

Exercice II : $(E) : \cos(2x) = \sin(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = \sin(x) \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2(x) = \sin(x)$

donc : $(E) : -2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$.

Posons $X = \sin(x)$

Par conséquent : $X \in [-1 ; 1]$.

Il vient que $2X^2 + X - 1 = 0$.

-1 est solution évidente de cette équation, donc la deuxième solution est : $\frac{1}{2}$

Donc : $\sin(x) = -1$ ou $\sin(x) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ $x = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ou $x = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $x = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.

Par conséquent : $\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(E) = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}$

Sur $I =]-\pi ; \pi]$, $\sin(x) \geqslant 0$ donc : $\sin(x) \neq -1$.

Par conséquent : $\sin(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

Ainsi : $\boxed{\mathcal{S}_I(E) = \left\{\frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6}\right\}}$

Exercice III : $z_0 = 1$; $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n$

1-a) $\left|1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right| = \sqrt{1+\frac{3}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Soit $\theta = \arg\left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ donc : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

Donc : $\boxed{1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}}}$

b) $\boxed{z_1} = 1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}}}$

$\boxed{z_2} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2 = \boxed{\frac{4}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}}$

2-a) (z_n) est une suite géometrique.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = z_0 \times q^n$

$z_n = 1 \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n$

$\boxed{z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{6}}}$

b) Les points O, A_0 et A_n sont alignés si et seulement si l'affixe de A_n est réel car celles de O et A_0 le sont.
Or l'affixe de A_n est : z_n.
Donc : $z_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z_n) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow n\frac{\pi}{6} = 0\ [\pi] \Leftrightarrow n\frac{\pi}{6} = k\pi$ avec k
$z_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \boxed{n = 6k}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Ainsi, les point O, A_0, A_n sont alignés si et seulement si $\underline{n}$ <u>est un multiple de 6</u>.

3) $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = |z_{n+1} - z_n|$

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = |z_{n+1} - z_n| = A_n A_{n+1}$.

Par suite, (d_n) représente la distance entre 2 points successifs dont l'affixe est caractérisée par (z_n).

b) $\boxed{d_0} = |z_1 - z_0| = \left|i\frac{\sqrt{3}}{3}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

c) $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_{n+1} - z_{n+1}$

$$z_{n+2} - z_{n+1} = z_{n+1}\left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)}$$

d) $\forall n \in \mathbb{N},\ d_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = \left|\left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)\right|$

$$d_{n+1} = \left|1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right| \times |z_{n+1} - z_n| = \frac{2}{\sqrt{3}}\, d_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \boxed{d_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\, d_n}$$

Par suite (d_n) est géométrique de raison $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = d_0 \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$

$$\boxed{d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n}$$

4-a) $\forall n \in \mathbb{N},\ \boxed{|z_n|^2} = z_n \times \bar{z}_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{6}} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{6}} = \boxed{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}}$

Donc : $|z_n|^2 + d_n^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$

de plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ |z_{n+1}|^2 = z_{n+1} \times \overline{z_{n+1}} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n+2} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ \boxed{|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2}$

4-b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2$

$OA_{n+1}^2 = OA_n^2 + A_nA_{n+1}^2$ par déf de (d_n)

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, pour tout n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n

4-c) voir Annexe.

4-d) D'après 4-b), le triangle OA_4A_5 est rectangle en A_4, donc A_5 se trouve sur la perpendiculaire à (A_4O) passant par A_4.

De plus, le triangle OA_5A_6 est rectangle en A_5, donc A_5 se trouve sur le cercle de centre I et de rayon OI où I désigne le milieu du segment $[OA_6]$.

A_5 est donc l'intersection entre la perpendiculaire précédente et le cercle.