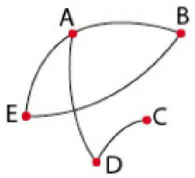
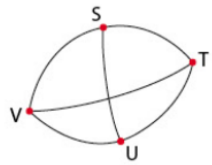
Chapitre final	Les Graphes

I) Vocabulaire

1) Définitions

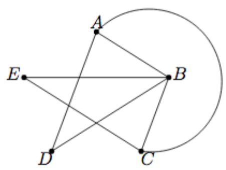
Un graphe est constitué de sommets dont certains sont reliés par des arêtes.
Deux sommets reliés par une arête sont dits ***adjacents.***
L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.
Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.
Un graphe est complet lorsque tous ses sommets sont adjacents.

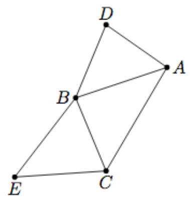
Exemples

	
Le graphe ci-dessus est d'ordre	Le graphe ci-dessus est d'ordre
Le degré du sommet A est	Le degré du sommet U est
Les sommets A et B sont	Les sommets V et T sont
Ce graphe n'est pas complet :	Ce graphe est complet :

Remarque :

Les points d'intersection des arêtes n'ont a priori pas d'importance. Ci-dessous deux représentations d'un même graphe :





Exemple

Le Centre d'Études et d'Application sur les Nouvelles Technologies Éducatives (CEANTE) a découpé la carte de France comme ci-contre.
a) Modéliser cette carte par un graphe dans lequel l'existence d'une frontière entre deux zones se traduira par une arête.
b) Déterminer l'ordre de ce graphe.
c) Le graphe est-il complet ?

II) Degré d'un sommet

Introduction

Pouvez-vous faire un lien entre la somme des degrés des sommets d'un graphe non orienté et son nombre d'arêtes ?
Que pouvez-vous en déduire sur cette somme ?
Que pouvez-vous en déduire sur le nombre de sommets ayant un degré impair ?

Propriété

La somme des degrés des sommets d'un graphe non orienté est égale à ……………………………

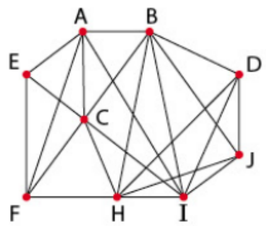
Le nombre de sommets de degré impair d'un graphe non orienté est………………………………..

Exemple 1

Les neuf sommets du graphe ci-contre représentent les lacs du delta d'un grand fleuve. Chaque arête représente un canal de communication entre deux lacs.

a) Déterminer le degré de chaque sommet.

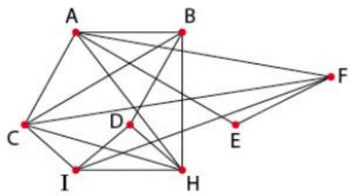
b) En déduire le nombre de canaux de communication entre ces lacs.



✂--

Exemple 2

4 Le graphe suivant modélise le plan d'un village. Les arêtes du graphe représentent ses rues et les sommets du graphe les croisements de celles-ci.



a) Déterminer le degré de chaque sommet.

b) En déduire le nombre de rues de ce village.

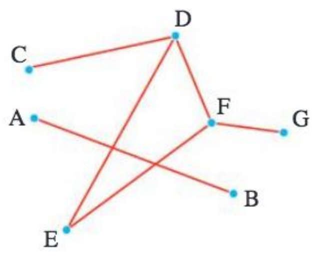
III) Parcourir un graphe non orienté

1) Définitions

Dans un graphe non orienté, on appelle ***chaîne*** une suite de sommets dans laquelle deux sommets consécutifs sont adjacents.
La longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui composent la chaîne.
Une chaîne fermée est une chaîne dont le premier et le dernier sommet sont confondus.
Un cycle est une chaîne fermée dont les arêtes sont distinctes.
Un graphe est connexe si deux sommets distincts quelconques peuvent être reliés par une chaîne.

Exemple

Le graphe ci-contre est d'ordre 7.
Les sommets A et C ne peuvent pas être reliés par une chaîne donc ce graphe n'est pas connexe.
G–F–E–D–F est une chaîne de longueur 4.
La chaîne C–D–F–E–D–C est une chaîne fermée de longueur 5.
La chaîne fermée C–D–F–E–D–C n'est pas un cycle car la chaîne passe deux fois par l'arête C–D. (le graphe n'étant pas orienté l'arête C–D est la même que l'arête D–C)
La chaîne D–E–F–D est un cycle de longueur 3.



2) Chaîne eulérienne

a) Définition

Une ***chaîne eulérienne*** est une chaîne qui contient chaque arête du graphe une et une seule fois.

Un ***cycle eulérien*** est une chaîne eulérienne fermée.

b) Théorème d'Euler

Dans le cas d'un graphe non-orienté, un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 ou à 2.

c) Conséquence

Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

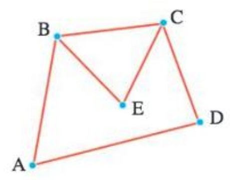
Si un graphe connexe a deux sommets de degré impair, ce sont les extrémités de la chaîne eulérienne.

Un graphe ayant plus de deux sommets de degré impair ne possède pas de chaîne eulérienne.

Exemple 1

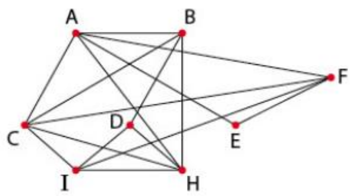
Le graphe ci-contre est-il connexe ?

Possède-t-il une chaîne eulérienne ?



Exemple 2

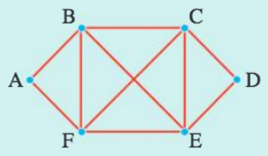
4 Le graphe suivant modélise le plan d'un village. Les arêtes du graphe représentent ses rues et les sommets du graphe les croisements de celles-ci.



a) Déterminer le degré de chaque sommet.
b) En déduire le nombre de rues de ce village.

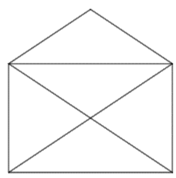
Exemple 3

Le graphe ci-contre indique les parcours possibles entre les sept bâtiments d'une entreprise.
Un agent de sécurité effectue régulièrement des rondes de surveillance en partant du point A.
En justifiant la réponse, montrer qu'il est possible pour l'agent de revenir à son point de départ en passant une fois et une seule par tous les chemins de cette entreprise.



Remarque

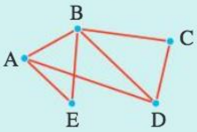
Une chaîne eulérienne peut être tracée d'un trait continu sans repasser par une arête déjà tracée.
Vous l'avez déjà certainement fait pour tracer la maison (ou l'enveloppe) ci-contre sans relever son stylo ni repasser sur un trait déjà tracé.



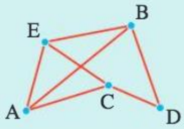
__Exemple 4__

Peut-on dessiner sans lever le crayon et en ne passant qu'une seule fois sur chaque arête les graphes ci-dessous ? Justifier la réponse.

Graphe 1



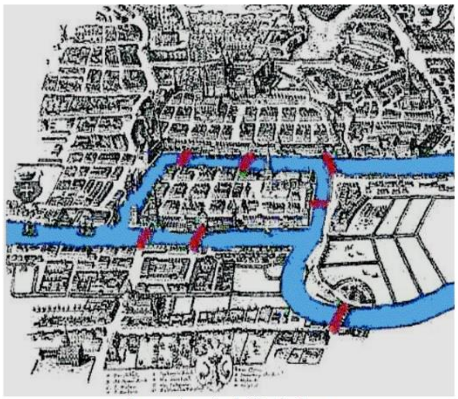
Graphe 2



__Exemple 5__

La ville de Königsberg est construite autour de deux îles reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles, comme représenté sur le plan ci-contre.

Est-il possible de se promener dans les rues de Königsberg en passant une et une seule fois par chaque pont ?



Les sept ponts de Konigsberg

__Remarque__

Le problème des sept ponts de Königsberg est connu pour être à l'origine de la théorie des graphes.
Il a été résolu en 1735 par Leonhard Euler.

__Exemple 6__

Un voyageur visite ces 6 pays d'Asie du sud-est. Il souhaite traverser une fois et une seule chaque frontière. Est-ce possible ?

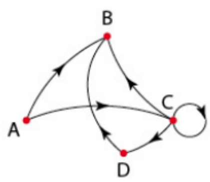
__IV) Graphe orienté__

__Définitions__

Un graphe orienté est un graphe dont les arêtes sont orientées.
Chaque arête ne peut être parcourue que dans le sens de la flèche.
Une boucle est une arête orientée ayant pour origine son extrémité.

__Exemple__

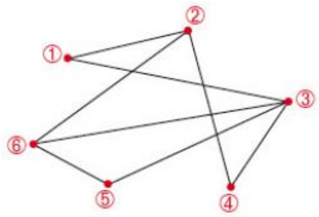
Le graphe ci-contre est un graphe orienté.
On peut se rendre du sommet A au sommet B mais pas du sommet B au sommet A.
À partir du sommet C, on peut se rendre au sommet C par la boucle.



V) Matrices d'adjacence d'un graphe

Introduction aux matrices d'adjacences

Six élèves, désignés ci-contre par ①, ②, …, ⑥, se retrouvent et constatent qu'ils sont tous inscrits sur le même réseau social.
Le graphe G ci-contre schématise les liens d'amitiés qui les unissent sur ce réseau.



1 **a)** Reproduire et compléter le tableau ci-contre dans lequel on inscrit 1 lorsqu'il existe un lien d'amitié entre deux élèves et 0 sinon.
b) Écrire la matrice M associée à ce tableau.
On dit que M est **la matrice d'adjacence** associée au graphe G.

	①	②	③	④	⑤	⑥
①						
②						
③						
④						
⑤						
⑥						

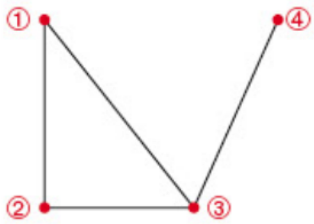
2 On dit que la chaîne ③ ⑤ ⑥ relie l'élève ③ à l'élève ⑥, et a pour longueur 2.
a) Écrire toutes les chaînes de longueur 2 reliant l'élève ① à l'élève ④.
b) Écrire toutes les chaînes de longueur 3 reliant l'élève ② à l'élève ⑤.
c) Calculer la matrice M^2. Comparer le coefficient a_{14} (ligne 1 et colonne 4) à la réponse à la question **2 a)**.
d) Proposer une façon de retrouver également la réponse à la question **2 c)**. Vérifier.

✂--

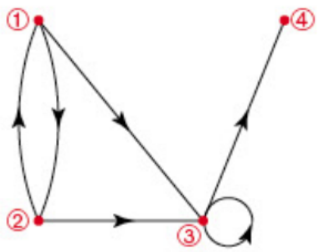
1) Définition

Soient n un entier naturel non nul et G un graphe d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n.
La matrice d'adjacence associée au graphe G est la matrice carrée M d'ordre n où le coefficient m_{ij} situé à la ligne i et à la colonne j est égal au nombre d'arêtes reliant le sommet i au sommet j.

Exemples



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Propriété

Soient n un entier naturel non nul et G un graphe d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n.
M la matrice d'adjacence associée à G.
Pour tout entier naturel $k \geq 1$, le coefficient situé en ligne i et en colonne j de la matrice M^k, noté $(M^k)_{ij}$ est le nombre de chaînes de longueur k reliant i à j.

Démonstration de la propriété par récurrence

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $(M^k)_{ij}$, le coefficient situé en ligne i et colonne j de la matrice M^k
et $P(k)$ la propriété : " $(M^k)_{ij}$ est le nombre de chemin de longueur k reliant i à j ".

- Initialisation : P(1) est vraie par définition d'une matrice d'adjacence : $(M^1)_{ij} = (M)_{ij}$ est bien le nombre de chemin de longueur 1 reliant i à j.

- Hérédité : on suppose que pour un entier $m \geq 1$, $P(m)$ est vraie. Démontrons alors que $P(m+1)$ est vraie :

  Un chemin de longueur $m+1$ reliant i à j est composé d'un chemin de longueur m reliant i à un sommet quelconque h (où $1 \leq h \leq n$) suivie d'un chemin de longueur 1 reliant h à j.

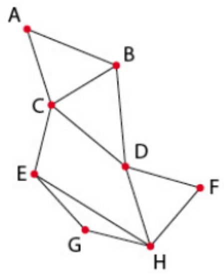
  Donc le nombre de chemin de longueur $m+1$ reliant i à j est : $$\sum_{h=1}^{n} (M^m)_{ih} \times (M)_{hj} = (M^{m+1})_{ij}$$

  Donc la propriété $P(m+1)$ est vraie.

- Conclusion : pour tout entier $k \geq 1$, la propriété $P(k)$ est vraie.

__Exemple 1__

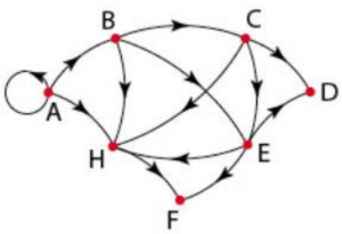
Un producteur prépare la tournée d'un orchestre qui se déplacera chaque jour d'une ville à une autre.
Le graphe ci-contre représente différentes villes dans lesquelles ils ont la possibilité de jouer et les autoroutes reliant ces villes.
a) Déterminer la matrice d'adjacence M associée au graphe puis calculer M^3.
b) La tournée commencera dans la ville B pour se terminer trois jours plus tard dans la ville G. Combien y a-t-il d'itinéraires possibles ? Préciser ces itinéraires.



✂--

__Exemple 2__

8 **a)** Déterminer la matrice d'adjacence M associée à ce graphe, puis calculer M^4.
b) Combien y a-t-il d'itinéraires possibles de longueur 4 reliant A et F ? Préciser ces itinéraires.



VI) Chaînes de Markov

1) Vocabulaire

Un **processus** est une suite (X_n) de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble E à deux ou trois éléments, appelés les **états**. On dit que E est **l'espace des états**.
Pour tout état i de E et pour tout entier naturel n, dire que le processus **est dans l'état *i* à l'instant *n*** signifie que l'événement $\{X_n = i\}$ est réalisé.

2) Définition

Une **chaîne de Markov** sur un espace d'états E est un processus (X_n) tel que :
- pour tout état i de E, l'événement $\{X_{n+1} = i\}$ ne dépend que de l'état dans lequel était le processus à l'instant n (« Le futur ne dépend que de l'instant présent ») ;
- la probabilité de passer de l'état i à l'état j ne dépend pas de l'instant n.

Exemple 1

Dans un certain pays, s'il pleut un certain jour alors il pleut également le lendemain avec une probabilité égale à 0,7.
De plus, s'il ne pleut pas un certain jour alors il pleut le lendemain avec une probabilité égale à 0,2.
On choisit au hasard une journée. X_n est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 s'il pleut après n jours et 2 s'il ne pleut pas après n jours.
Comme le fait qu'il pleuve une journée ne dépend que du temps de la journée précédente et que la probabilité que le temps change ou non ne dépend pas du rang de la journée, on en déduit que la suite (X_n) est une chaîne de Markov à deux états 1 et 2.

3) Graphe et matrice associée

Définition

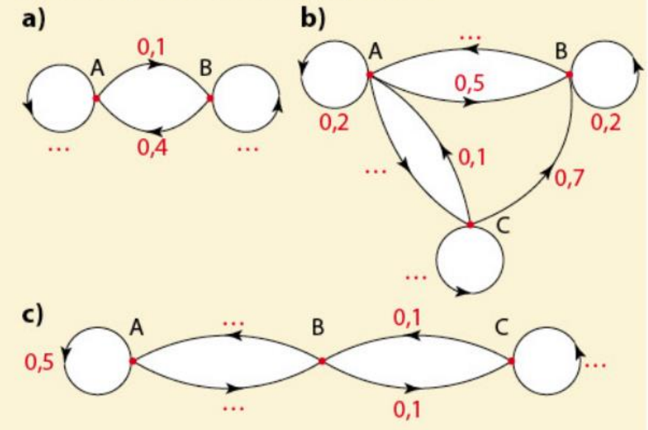
À une chaîne de Markov, on associe :
- un graphe orienté pondéré, dit **graphe pondéré associé**, dont les sommets sont les états et dont l'arête orientée reliant l'état i à l'état j est pondérée par la probabilité de passer de l'état i à l'état j.
- une matrice carrée P, dite **matrice de transition associée**, où le coefficient situé en ligne i et colonne j est égal à la probabilité de passer de l'état i à l'état j.

Retour sur l'exemple 1 :

Déterminer le graphe pondéré et la matrice de transition associée à l'exemple précédent.

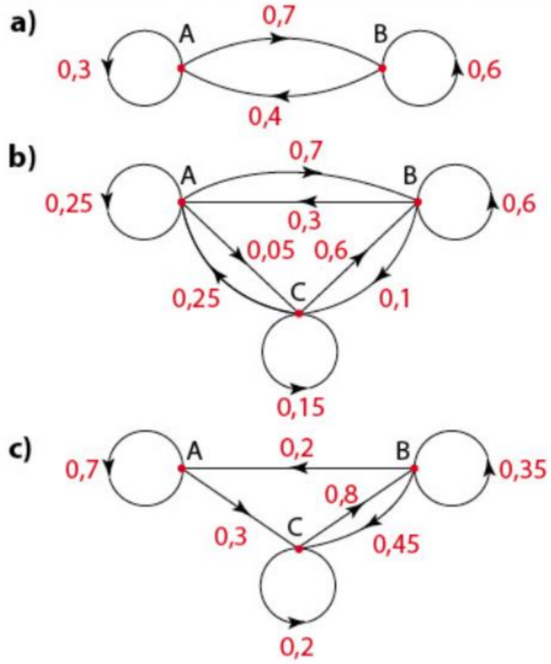
Exemple 2

43 Pour chaque graphe pondéré, donner oralement les probabilités manquantes.



Exemple 3

45 Pour chaque graphe pondéré, écrire la matrice de transition associée en conservant l'ordre alphabétique.



a) $P = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

b) $P = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}7 & 0{,}05 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}6 & 0{,}15 \end{pmatrix}$

c) $P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}35 & 0{,}45 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

Exemple 4

Chaque année, chacun des habitants d'un village choisit une activité parmi la randonnée (R), le vélo (V) ou la lecture (L).
Des études montrent que :

- 80 % des habitants ayant choisi l'activité lecture une année la conservent l'année suivante alors que 5 % changent pour l'activité randonnée ;
- 70 % des habitants pratiquant l'activité randonnée une année la conservent l'année suivante alors que 20 % changent pour l'activité vélo ;
- 60 % des habitants pratiquant l'activité vélo une année la conservent l'année suivante alors que 30 % changent pour l'activité lecture.

Pendant la durée de l'étude, on suppose que l'ensemble des habitants concernés reste inchangé.

a) Traduire l'énoncé à l'aide d'une chaîne de Markov.

b) Déterminer le graphe pondéré et la matrice de transition associés.

Exemple 5

10 À l'approche d'une élection où deux candidats A et B sont en lice, une étude montre que d'une semaine à la suivante :
– 10 % des électeurs se déclarant pour A,
– 15 % des électeurs se déclarant pour B,
changent d'avis.
On suppose que l'ensemble des électeurs reste inchangé.
a) Traduire l'énoncé à l'aide d'une chaîne de Markov.
b) Déterminer le graphe pondéré et la matrice de transition associés.

✂--

Exemple 6

11 Les habitants d'une commune ne peuvent que s'abonner aux opérateurs téléphoniques A et B.
À partir de 2019, on considère que, d'une année à la suivante, 10 % des abonnés à l'opérateur A le quitte pour l'opérateur B et 40 % des abonnés à l'opérateur B le quitte pour l'opérateur A.
On suppose que l'ensemble des abonnés reste inchangé.
a) Traduire l'énoncé à l'aide d'une chaîne de Markov.
b) Déterminer le graphe pondéré et la matrice de transition associés.

✂--

4) Distributions

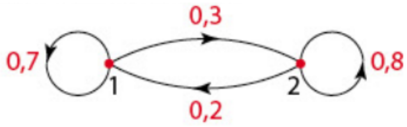
(X_n) est une chaîne de Markov à 2 ou 3 états de matrice de transition P.

a) La matrice P^n

Soient i et j deux états de la chaîne de Markov (X_n) et un entier naturel $n \geq 1$.
Le coefficient $(P^n)_{ij}$ en ligne i et en colonne j de la matrice $\boldsymbol{P^n}$ est la probabilité de passer de l'état i à l'état j en n transitions.

Exemple 1

Reprenons l'exemple 1 de ce cours :
Dans un certain pays, s'il pleut un certain jour alors il pleut également le lendemain avec une probabilité égale à 0,7.
De plus, s'il ne pleut pas un certain jour alors il pleut le lendemain avec une probabilité égale à 0,2.
On choisit au hasard une journée. X_n est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 s'il pleut après n jours et 2 s'il ne pleut pas après n jours.



$$P=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}① & ②\end{array} \\ & \begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}\begin{array}{c}①\\②\end{array}\end{array}$$

1) Quelle est la probabilité de passer de l'état 1 à l'état 2 en 4 transitions ?

2) Quelle est la probabilité de passer de l'état 2 à l'état 1 en 5 transitions ?

HISTORIQUE

[A]

$$\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.2 & 0.8\end{bmatrix}$$

[A]^4

$$\begin{bmatrix}0.4375 & 0.5625\\ 0.375 & 0.625\end{bmatrix}$$

[A]^5

$$\begin{bmatrix}0.41875 & 0.58125\\ 0.3875 & 0.6125\end{bmatrix}$$

✂---

Exemple 2

49 $P=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}9 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8\end{pmatrix}$ est la matrice de transition associée à une chaîne de Markov à trois états A, B et C en conservant l'ordre alphabétique.

a) Déterminer P^5.

b) En déduire la probabilité de passer de l'état C à l'état C en 5 transitions. *Arrondir au centième.*

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP

[B]

$$\begin{bmatrix}0.1 & 0.9 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0.1 & 0.1 & 0.8\end{bmatrix}$$

[B]^5

$$\begin{bmatrix}0.08371 & 0.15579 & 0.7605\\ 0.0845 & 0.1509 & 0.7646\\ 0.08491 & 0.15251 & 0.76258\end{bmatrix}$$

✂---

b) Distribution après n transitions

Définition

La ***distribution initiale***, notée π_0, est la loi de probabilité de la variable aléatoire X_0.
La ***distribution après n transitions***, notée π_n, est celle de la variable aléatoire X_n.
Ces distributions sont représentées par des matrices lignes.

Exemple

Voici la loi de probabilité d'une variable aléatoire X_0 :

Valeurs prises par X_0 : x_i	1	2	3
Probabilité que X soit égale à x_i $P(X_0 = x_i) = p_i$	0,6	0,1	0,3

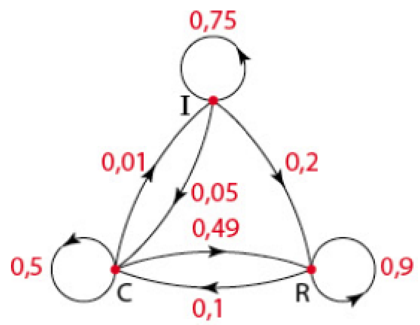
La distribution de la variable aléatoire X_0 est alors la matrice ligne $\pi_0 = (0{,}6 \quad 0{,}1 \quad 0{,}3)$

Propriété

Soit π_0 la distribution initiale d'une chaîne de Markov. Pour tout entier naturel $n \geq 1$,
La distribution π_n après n transitions vérifie : $\pi_n = \pi_0 \times P^n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\pi_{n+1} = \pi_n \times P$.

Exemple

Dans une entreprise, une rumeur se propage au début d'une pause.
Chaque employé se trouve alors dans l'un des états suivants : ignorer la rumeur (I), connaître la rumeur et la propager (R), connaître la rumeur sans la propager (C).
Initialement, 0,1 % des employés connaissent la rumeur et la propagent, les autres l'ignorent.
Le graphe pondéré ci-dessous traduit l'évolution de l'état d'un employé d'une minute à la suivante.



a) Déterminer la matrice de transition P associée en conservant l'ordre alphabétique.
b) Donner la distribution initiale π_0.
c) Déterminer la distribution π_5. *Arrondir au centième.*
En déduire le pourcentage d'employés ignorant la rumeur après 5 minutes.

c) Distribution invariante

Définition

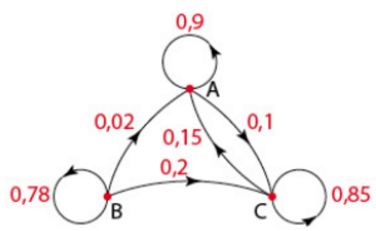
Soit P la matrice de transition associée à une chaîne de Markov.
Dire que π est une distribution invariante de la chaîne de Markov signifie que $\pi = \pi \times P$.

Exemple 1

Soit $P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$ la matrice de transition associée à une chaîne de Markov et $\pi = (0,25 \quad 0,75)$ une distribution.
Montrer que π est une distribution invariante de cette chaîne de Markov.

Exemple 2

Une île ne compte que trois villes A, B et C. Ce graphe pondéré représente les évolutions de population entre ces trois villes d'une année à la suivante. On suppose que l'ensemble des habitants de l'île reste inchangé pendant l'étude.
a) Déterminer la matrice de transition P associée à la chaîne de Markov traduisant la situation.
b) Déterminer la distribution invariante π de cette chaîne.



<u>Exercice de dénombrement nombre d'arête, degrés des sommets</u>

1) Un hectogone est un polygone à 100 côtés. Avec toutes ses diagonales, l'hectogone forme un graphe.
Combien la figure possède-t-elle de segments ?

2) Cinq jeunes souhaitent organiser un tournoi de ping-pong où chaque joueur rencontre trois autres joueurs.
Est-ce possible ?

3) Serrage de mains : une soirée comporte 27 invités. Chaque invité serre la main de tous les autres. Combien de poignés de mains seront effectuées ?

Corrigé de l’exercice précédent

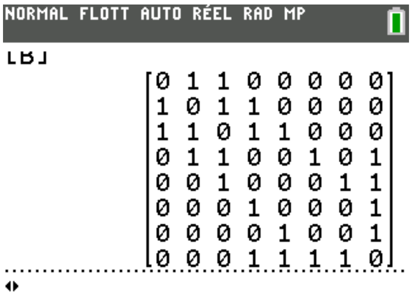
1) En chaque sommet, le graphe possède 99 arêtes. Le graphe possède 100 sommets donc la somme des degrés de tous les sommets est égale à 99 x 100 = 9900. D'après la propriété de la somme des degrés, le graphe possède 9900 : 2 = 4950 arêtes (ou segments si l'on considère la figure géométrique).

2) L'organisation du tournoi devrait se représenter par un graphe d'ordre 5 où chaque sommet serait de degré 3. La somme des degrés est égale à 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15. Donc d'après la propriété de la somme des degrés, le graphe possède 15 : 2 = 7,5 arêtes. Ce qui est impossible donc la situation du tournoi n'est pas réalisable.

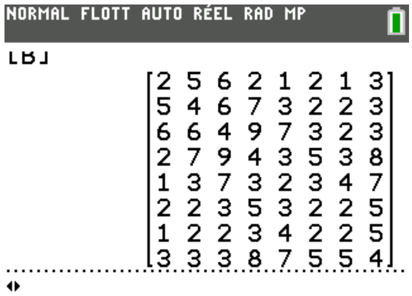
3) Chaque invité est un des 27 sommets d’un graphe complet. Chaque sommet a pour degré 26. La somme des degrés est de 27×26. Le nombre d’arêtes est donc 27×13 = 351.

Correction ex2:

a) La matrice d’adjacence associée à ce graphe en classant les sommets par ordre alphabétique est M :



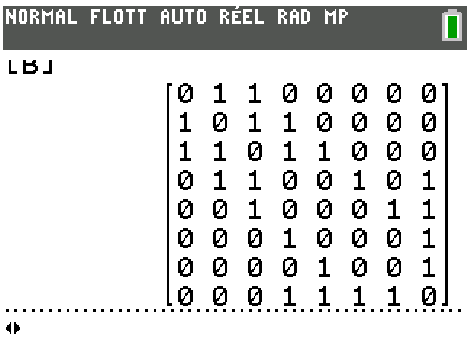
M^3 est alors :



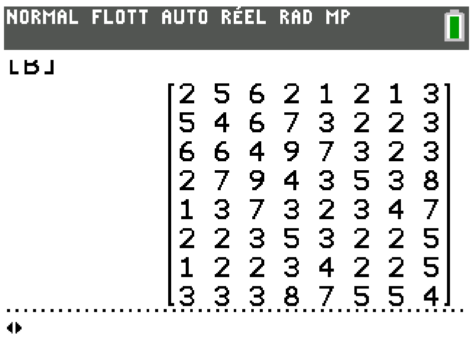
b) $(M^3)_{27} = 2$. Donc il y a 2 itinéraires possibles de la ville B à la ville G en 3 jours : B–C–E–G et B–D–H–G.

Correction :

a) La matrice d’adjacence associée à ce graphe en classant les sommets par ordre alphabétique est M :



M^3 est alors égale à :



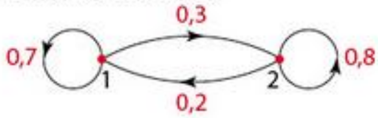
b) $(M^3)_{27} = 2$. Donc il y a 2 itinéraires possibles de la ville B à la ville G en 3 jours : B–C–E–G et B–D–H–G.

Correction :

• Graphe pondéré associé

La probabilité de rester dans l'état 1 est égale à 0,7, on pondère donc la boucle du sommet 1 du graphe par 0,7.

La probabilité de passer de l'état 1 à l'état 2 est donc égale à 0,3, on pondère donc l'arête orientée du sommet 1 au sommet 2 par 0,3. On procède de même pour les autres arêtes.



La somme des probabilités situées sur les arêtes partant d'un même sommet est égale à 1.

• Matrice de transition associée

Le coefficient p_{11} de la matrice P est la probabilité de rester dans l'état 1, donc 0,7.

Le coefficient p_{12} de la matrice P est la probabilité de passer de l'état 1 à l'état 2, donc 0,3.

Le coefficient p_{21} de la matrice P est la probabilité de passer de l'état 2 à l'état 1, donc 0,2.

De même $p_{22} = 0{,}8$.

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} ① & ② \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ ① \\ ② \end{array}$$

La somme des coefficients de la matrice de transition situés sur une même ligne est égale à 1.

Correction exemple 4 p8-9

Correction de l'exemple 4 :

a) On choisit au hasard un habitant du village.

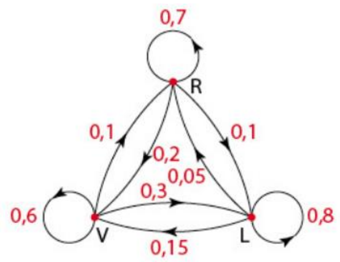
X_n est la variable aléatoire qui prend la valeur R si l'habitant choisit l'activité randonnée après n années, V s'il choisit l'activité vélo et L s'il choisit l'activité lecture.

• Le fait que l'habitant pratique une certaine activité une année ne dépend que de l'activité qu'il pratiquait l'année précédente.

• La probabilité de passer d'une activité à une autre ne dépend pas du rang de l'année.

Ainsi la suite (X_n) est une chaîne de Markov à trois états L, R et V.

b) Voici ci-contre le graphe pondéré et la matrice de transition associés à cette chaîne de Markov en conservant l'ordre alphabétique.



$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L & R & V \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0{,}15 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ L \\ R \\ V \end{array}$$

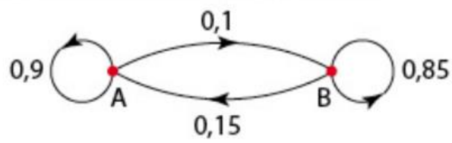
Correction de l'exemple 5 :

10 a) On choisit au hasard un électeur.

(X_n) est la suite de variables aléatoires où X_n est le candidat pour lequel l'électeur se déclare après n semaines.

Le fait que l'électeur se déclare pour un certain candidat une semaine ne dépend que du candidat pour lequel il se déclarait la semaine précédente. De plus, la probabilité de changer ou non d'avis ne dépend pas du rang de la semaine. Ainsi la suite (X_n) est une chaîne de Markov à deux états A et B.

b) Voici le graphe pondéré et la matrice de transition P associés à cette chaîne de Markov en conservant l'ordre alphabétique.



$$P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix}$$

Correction exemple p 11

Correction :

Solution

a) La matrice de transition associée est $P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}01 & 0{,}49 \\ 0{,}05 & 0{,}75 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.

b) La distribution initiale est $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}999 & 0{,}001 \end{pmatrix}$.

c) $\pi_5 = \pi_0 \times P^5$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient $\pi_5 \approx \begin{pmatrix} 0{,}13 & 0{,}24 & 0{,}63 \end{pmatrix}$.

Ainsi, environ 24 % des employés ignorent la rumeur après 5 min.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.999 & 0.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.01 & 0.49 \\ 0.05 & 0.75 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}^5$$

$$\begin{bmatrix} 0.1324291 & 0.239738 & 0.6278329 \end{bmatrix}$$