

Partie II :**Chapitre 3 : Trigonométrie et nombres complexes.****I – Cocktail de formules de trigonométrie****Formules d'addition**

Pour tous réels a et b :

$$\heartsuit \heartsuit \heartsuit \cos(a-b) = \cos(a) \times \cos(b) + \sin(a) \times \sin(b) \heartsuit \heartsuit \heartsuit$$

$$\heartsuit \heartsuit \heartsuit \cos(a+b) = \cos(a) \times \cos(b) - \sin(a) \times \sin(b) \heartsuit \heartsuit \heartsuit$$

$$\heartsuit \heartsuit \heartsuit \sin(a-b) = \sin(a) \times \cos(b) - \cos(a) \times \sin(b) \heartsuit \heartsuit \heartsuit$$

$$\heartsuit \heartsuit \heartsuit \sin(a+b) = \sin(a) \times \cos(b) + \cos(a) \times \sin(b) \heartsuit \heartsuit \heartsuit$$

Pour les curieux, d'où sortent ces horreurs et pourquoi énonce-t-on en premier les formules où apparaissent des soustractions ?

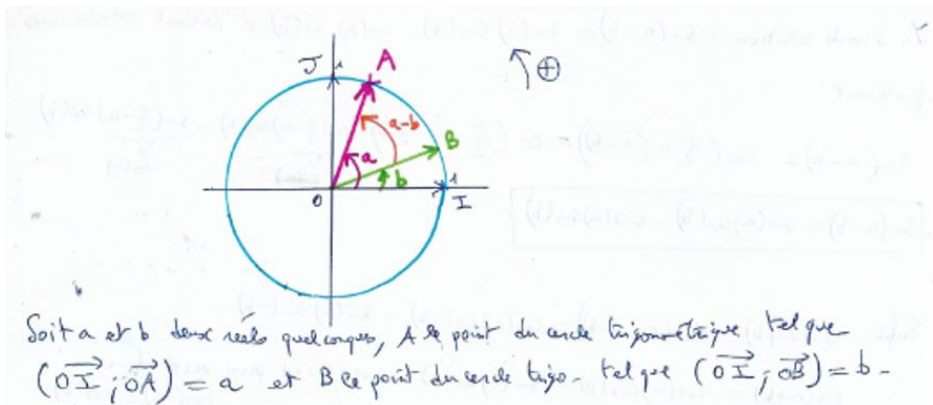
Preuve :

Rappels sur le produit scalaire du plan :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls du plan, on a : $\heartsuit \heartsuit \heartsuit \vec{u} \cdot \vec{v} = \heartsuit \heartsuit \heartsuit$

Si de plus on est dans un repère orthonormé du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$, et si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors :

$$\heartsuit \heartsuit \heartsuit \vec{u} \cdot \vec{v} = \heartsuit \heartsuit \heartsuit$$



$$\vec{OB} \cdot \vec{OA} = OB \times OA \times \cos(\vec{OB}; \vec{OA}) = OB \times OA \times \cos(a - b).$$

Or $OA = OB = 1$, donc on a : $\vec{OB} \cdot \vec{OA} = \cos(a - b)$. (*)

De plus, dans le repère orthonormé $(O ; \overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OJ})$: $A(\cos(a) ; \sin(a))$ et $B(\cos(b) ; \sin(b))$.

Donc : $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = xx' + yy' = \cos(b)\cos(a) + \sin(b)\sin(a)$. (**).

Enfin, par commutativité des réels, on a au vu de (*) et (**):

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

En observant que : $a+b = a-(-b)$, il vient :

$$\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos(a)\cos(-b) + \sin(a)\sin(-b).$$

Or $\cos(-a) = \cos(a)$ et $\sin(-b) = -\sin(b)$, donc : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

Pour la troisième relation :

Soit x appartenant à $\mathbb{R}$. On applique la relation 1) à : $a = \frac{\pi}{2}$ et $b = x$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(x) = \sin(x).$$

Donc pour tout réel x :

$$\heartsuit \heartsuit \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \text{ et en affectant à } x \text{ la valeur } \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{ on a aussi : } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \heartsuit \heartsuit.$$

Soit $x = a - b$:

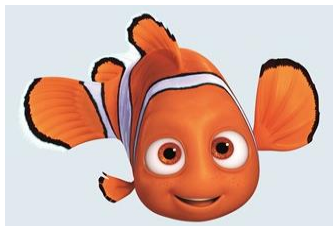
$$\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a + b\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(b).$$

$$\text{Donc } \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b).$$

Enfin la dernière relation :

$$\sin(a+b) = \sin(a-(-b)) = \sin(a)\cos(-b) + \cos(a)\sin(-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b).$$

Comment mémoriser ces relations d'usage courant post bac ?



On retiendra que **le cosinus ne mélange pas les blocs (= produit de deux cos puis produit de deux sin)**, mais **change les signes**, et que le **sinus mélange les blocs** mais **ne change pas les signes**.

Pour le cosinus : **coco ± sisi** : (bloc de cos suivi de bloc de sin et signe contraire entre les deux blocs de celui qui est dans la parenthèse du cos de la somme initiale).

Pour le sinus : **sico ± cosi** : (mélange sincos ± cossin avec entre les deux blocs la même opération que celle dans la parenthèse du sin de la somme initiale).

En particulier, lorsque dans les relations d'additions, on fait : $a = b = x$, on obtient les relations suivantes appelées formules de duplication :

Formules de duplication

Pour tout réel x , on a : $\heartsuit \heartsuit \heartsuit \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \heartsuit \heartsuit \heartsuit$

Pour tout réel x , on a : $\heartsuit \heartsuit \heartsuit \sin(2x) = 2\sin(x) \times \cos(x) \heartsuit \heartsuit \heartsuit$

Preuve : $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)$ d'après la seconde formule d'addition.

$\boxed{\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)}$. Or d'après la relation de Pythagore trigonométrique, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, de sorte que : $\boxed{\cos(2x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = \boxed{2\cos^2(x) - 1}}$.

La relation $\boxed{\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)}$ s'obtient avec Pythagore en remplaçant cette fois-ci $\cos^2(x)$ par $1 - \sin^2(x)$.

a) $\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x)$ d'après la quatrième formule d'addition.

$\boxed{\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)}$ car $\sin(x)\cos(x) = \cos(x)\sin(x)$: le produit de réels est commutatif !

Exercice 1

1) En observant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et celle de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2) Donner la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$. En déduire celle de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

✂-----

Exercice 2

Démontrer que pour tout réel x , $\cos(x) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$.

On admet de même que : $\sin(x) + \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$.

On note j le nombre complexe égal à : $j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

En déduire que : $1 + j + \bar{j} = 0$

✂-----

Exercice 3

1) Déduire des formules d'addition les relations suivantes appelées relations de factorisations :

Pour tout réel p et q :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

$$\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

2) Résoudre dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ l'équation : $\sin(2x) - \sin(3x) + \sin(4x) = 0$.

Exercice 4

On appelle fonction tangente la fonction définie, lorsque $\cos(x) \neq 0$ par : $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Soient a et b des réels tels que : a , b , et $a + b$ ne sont pas congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π .

1) Etablir que $\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$.

2) En déduire une formule de duplication de la tangente, puis la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

✂-----

II- Propriétés des arguments d'un nombre complexe non nul.

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls ayant pour écriture trigonométrique :

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \text{ et } z' = r'(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$$

Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes zz' et $\frac{z}{z'}$ (où $z' \neq 0$)

On obtient :

- $zz' =$

- $\frac{z}{z'} =$

En se souvenant que deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si : ils ont le même module et des arguments congrus modulo 2π on obtient :

Des propriétés déjà connues sur les modules :

- $|zz'| =$
- $\left| \frac{z}{z'} \right| =$

Et surtout, de nouvelles propriétés sur les arguments :

♥♥♥ Propriétés des arguments ♥♥♥

Pour tous nombres complexes z et z' non nuls et tout entier naturel $n \geq 1$:

- $\arg(zz') =$
- $\arg(z^n) =$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) =$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) =$
- Dans un repère orthonormé direct du plan, si A, B et C sont trois points deux à deux distincts d'affixes respectives z_A, z_B et z_C , alors on a : $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) =$

Preuve :

✂-----

Exercice 6

Sur la figure ci-contre, le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct (O ; U ; V).

Les points A, B, C, D et E sont situés sur des nœuds du quadrillage et ont pour affixe respective z_A , z_B , z_C , z_D et z_E .

Placer les points F, G, H, K et L d'affixe :

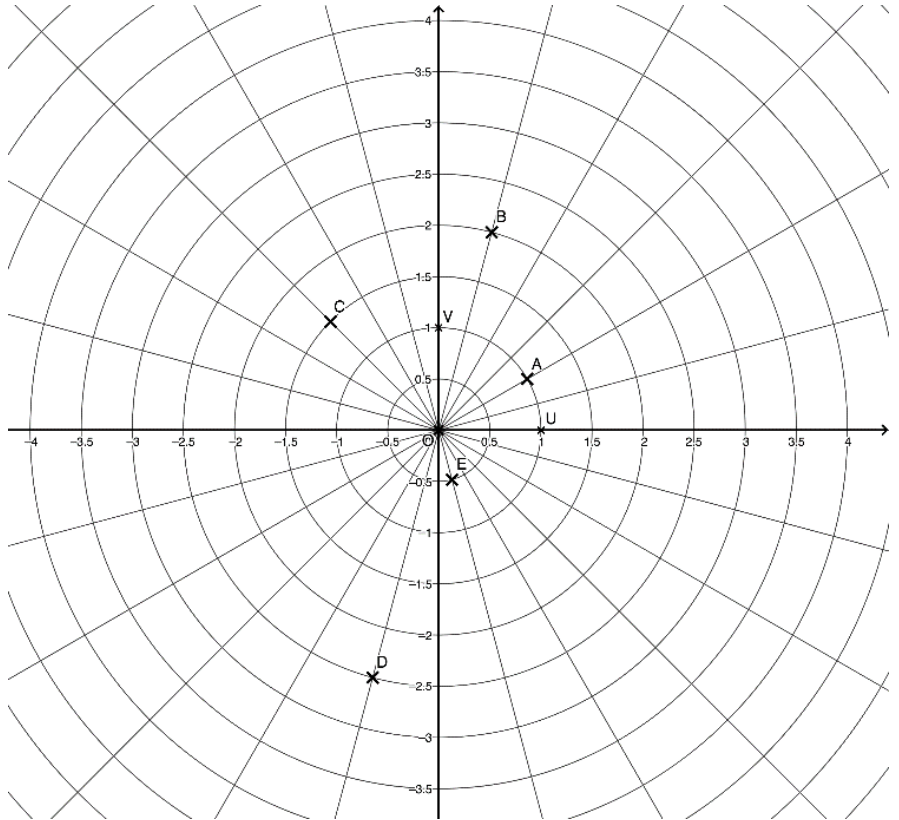
$$F(z_A \times z_B)$$

$$G(z_B \times z_C)$$

$$H\left(\frac{z_B}{z_A}\right)$$

$$K\left(\frac{z_C}{z_E}\right)$$

$$L=(z_D \times z_B)$$



✂-----

Exercice 7

Soit $z = 2\sqrt{3} - 2i$ et $z' = -1 + i$.

- 1) Déterminer le module et l'argument principal de z et z' .
- 2) En déduire le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$a = iz \quad ; \quad b = zz' \quad ; \quad c = z'^2 \quad ; \quad d = \frac{-2}{z} \quad ; \quad e = \frac{z^6}{z'^4}$$

✂-----

Exercice 8

Déterminer puis construire dans un repère orthonormé direct l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$1) \arg\left(\frac{z-1+i}{z-2-3i}\right) = 0[2\pi].$$

$$2) \arg\left(\frac{z+i}{z-2}\right) = \pi[2\pi].$$

$$3) \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi].$$

✂-----

Exercice 9

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 5 = 0$.
- 2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = 1 + 2i$, $z_B = \bar{z}_A$, $z_C = 1 + \sqrt{3} + i$ et $z_D = \bar{z}_C$.
 - a) Construire les points A et B.
 - b) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe : $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$.
 - c) En déduire la nature du triangle ABC.
 - d) Démontrer que A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
 - e) Construire en justifiant, les points C et D.

✂-----

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B, C et D distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que :

$$\begin{cases} z_A + z_C = z_B + z_D \\ z_A + iz_B = z_C + iz_D \end{cases}$$

Démontrer que le quadrilatère ABCD est un carré.

✂-----

Exercice 11

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

A tout point M d'affixe z , avec $z \neq 2 - i$, on associe le point M' d'affixe $z' = f(z) = \frac{z-i}{z-2+i}$.

- a) Déterminer l'affixe du point A' associé au point A d'affixe $1+i$.
- b) Déterminer le point M dont l'affixe est l'antécédent de i par f .
- c) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z dont l'image par f appartient au cercle unité.
- d) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit réel. Idem avec z' imaginaire pur.

✂-----

II- Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul.

Définissons la fonction f , sur $\mathbb{R}$, et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par la relation : $f(\theta) = \cos(\theta) + i \times \sin(\theta)$.

Nous allons voir que cette fonction admet des propriétés qui font penser à celle de la fonction exponentielle :

- a) En se servant de ce qu'on a fait au début du paragraphe II, on a :

$$- \text{ Pour tous réels } \theta \text{ et } \theta', f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta').$$

- b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Calculer $f'(\theta)$, et en déduire que pour tout réel θ , $f'(\theta) = i \times f(\theta)$.

- c) que vaut $f(0)$?

Les propriétés établies ci-dessus sont identiques à celles de la fonction g , définie sur $\mathbb{R}$ par :

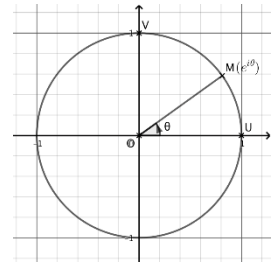
Pour tout réel x , et pour tout réel k , $g(x) = e^{kx}$. En effet :

On admet que l'on peut « *prolonger* » à $\mathbb{C}$ la notation exponentielle, en adoptant l'écriture suivante qui est due au mathématicien suisse Euler (aux environs de 1750) : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.



Leonhard Euler (1707–1783)

Définition : ♥♥♥ Pour tout réel θ : $e^{i\theta} = \dots\dots\dots$ ♥♥♥



♥♥♥ $e^{i\theta}$ est donc le nombre complexe dont le module est égal à, et dont un argument est♥♥♥

En effet :

Le cercle trigonométrique, noté $\mathcal{C}$ peut donc être défini comme suit : $\mathcal{C} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$.

Exemples

$$e^{i\pi} = \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = \quad e^{i0} = \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} =$$

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} =$$

Propriétés utiles de $e^{i\theta}$

♥♥♥

- Pour tout réel θ , $|e^{i\theta}| = \dots\dots$, et $\arg(e^{i\theta}) = \dots\dots$
- Pour tous réels θ et θ' , $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = \dots\dots\dots$
- $\frac{1}{e^{i\theta}} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ et $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = \dots\dots\dots$
- Pour tout entier relatif n , et pour tout réel θ , $(e^{i\theta})^n = \dots\dots\dots$
- Pour tout réel θ et tout entier relatif k , $e^{i(\theta+2k\pi)} = \dots$
- Pour tous réels θ et θ' : $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si et seulement si :

Preuve : Tout cela est quasiment évident. Pourquoi ?

Rappel

Tout nombre complexe $z \neq 0$ peut s'écrire sous sa forme trigonométrique $z = |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ avec $\theta = \arg(z) [2\pi]$

On peut alors l'écrire sous la forme : $z = |z| e^{i\theta}$.

Définition

Soit z un nombre complexe non nul, $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) [2\pi]$.

♥♥♥ L'écriture : $z = r e^{i\theta}$ est appelée une **forme exponentielle** de z . ♥♥♥

Remarque cruciale : L'intérêt de la forme exponentielle, c'est qu'elle va permettre de **nettement simplifier les calculs sur les complexes, surtout en présence de produit, puissances et quotients**, et ce, grâce aux différentes propriétés de l'exponentielle.

Exemples

- 1) Ecrire sous forme exponentielle : $z_1 = 4\sqrt{3} + 4i$; $z_2 = ie^{i\frac{\pi}{6}}$.
- 2) En déduire une forme exponentielle de $\frac{z_1^3}{z_2}$.
- 3) Déterminer tous les entiers relatifs n tels que z_1^n soit réel.
- 4) Donner la forme exponentielle de $z_3 = -2 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)$.
- 5) Quelle est la forme exponentielle de : $z = \sin(\theta) - i \cos(\theta)$, où θ est réel.

✂-----

Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Justifier.

(i) On considère le nombre complexe : $a = (-\sqrt{3} + i)^{19}$. **Affirmation** : " a est imaginaire pur".

(ii) Soit z un nombre complexe de module 1. **Affirmation** : " $z^2 + \frac{1}{z^2}$ est un nombre réel".

✂-----

II- Des formules célèbres**a) Les formules d'Euler**

Formules d'Euler :

Pour tout réel θ , ♥♥♥ $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ ♥♥♥ et ♥♥♥ $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ ♥♥♥

Preuve :

Exercice 12

1) Rappeler l'identité remarquable donnant le développement de $(a - b)^3$.

2) Exprimer, pour tout réel x , $\sin^3(x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\sin(3x)$.

On dit qu'on a linéarisé $\sin^3(x)$, c'est à dire qu'on l'a écrit sans puissance.

3) En déduire une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin^3(x)$.

Au chapitre calcul intégral, on verra que cette façon de faire est très classique et présente en analyse.

✂-----

Exercice 13

Quelle est la forme exponentielle de : $z = e^{i\theta} + 1$ où $\theta \in]-\pi; \pi]$. On retiendra bien la technique de l'angle moitié rencontrée dans cet exercice.

✂-----

b) La formule de Moivre

On a déjà vu que pour tout réel θ et tout entier n , $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

Nous allons voir que la formule de Moivre (Abraham Moivre, mathématicien français 1667-1754)

n'est en fait qu'une réécriture de cette relation.

Formule de Moivre :

♥♥♥ Pour tout réel θ et tout entier n , $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n =$

♥♥♥

Exemples d'utilisation

1) Retrouver les formules de duplication à partir de la formule de Moivre.

2) Déterminer tous les entiers naturels n tels que : $(1 + i\sqrt{3})^n = (1 - i\sqrt{3})^n$.

✂-----

Exercice 14

Soit A et B deux points distincts d'affixes respectives a et b .

ABC est un triangle équilatéral direct, s'il est équilatéral et que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

1) Montrer que ABC est équilatéral direct si et seulement si l'affixe c du point C vérifie : $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2) On note j le nombre complexe égal à $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

a) Combien vaut j^3 ? Et $1 + j + j^2$? Exprimer $e^{i\frac{\pi}{3}}$ en fonction de j .

b) En déduire que ABC est équilatéral direct si et seulement si : $a + bj + cj^2 = 0$.

c) De même, ABC est équilatéral indirect si et seulement si : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{-\pi}{3} [2\pi]$.

Par un raisonnement similaire à ceux effectués aux questions 1) et 2), on obtient sans peine :

ABC est équilatéral indirect si et seulement si : $a + bj^2 + cj = 0$.

Démontrer que ABC est équilatéral si et seulement si : $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

- 3) Un triangle équilatéral peut-il avoir les affixes de ses trois sommets toutes les trois entières ?
- 4) Un triangle équilatéral peut-il avoir ses trois sommets avec des affixes dont les parties réelles et imaginaires sont toutes entières ?

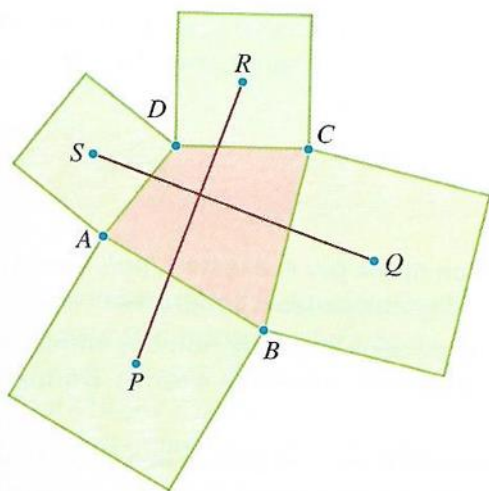
Exercice 15 (approfondissement, introduction aux rotations)

Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Soit ABCD un quadrilatère quelconque direct, c'est-à-dire que le trajet A, B, C, D se fait dans le sens direct.

On construit à l'extérieur de ce quadrilatère quatre carrés de centres P, Q, R et S.

La figure ci-dessous résume la situation.



Démontrer que $RP = SQ$ et que les droites (RP) et (SQ) sont perpendiculaires.

Exercice 16

1 Calculer De célèbres sommes trigonométriques

On considère un nombre réel x et n un entier naturel non nul. On cherche à trouver une expression explicite des sommes :

$$C = 1 + \cos(x) + \cos(2x) + \dots + \cos(nx) \text{ et}$$

$$S = \sin(x) + \sin(2x) + \dots + \sin(nx).$$

1. Exprimer $C + iS$ comme une somme d'exponentielles complexes.

2. En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique, en déduire que, pour tout nombre réel x ne s'écrivant pas sous la forme $x = 2k\pi$ (k entier relatif),

$$C + iS = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}.$$

3. En factorisant respectivement par $e^{i\frac{x}{2}}$ et par $e^{i\frac{(n+1)x}{2}}$, démontrer que :

$$\text{d'une part } 1 - e^{ix} = -2ie^{i\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

et d'autre part

$$1 - e^{i(n+1)x} = -2ie^{i\frac{(n+1)x}{2}} \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right).$$

4. Prouver alors que, pour tout réel x ne s'écrivant pas sous la forme $x = 2k\pi$ (k entier relatif), on a

$$C + iS = e^{i\frac{nx}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

5. En remarquant que C est la partie réelle et S la partie imaginaire de $C + iS$, en déduire la solution du problème.

6. Étudier le cas où x s'écrit sous la forme $x = 2k\pi$ (k entier relatif).

7. Applications : n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \dots + \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

b. Démontrer que :

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \dots + \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

III-Exercices issus de baccalauréat

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2 cm. On appelle f la fonction qui, à tout point M , distinct du point O et d'affixe un nombre complexe z , associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = -\frac{1}{z}.$$

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = -1 + i$ et $z_B = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.
 - a. Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point A' image du point A par la fonction f .
 - b. Déterminer la forme exponentielle de l'affixe du point B' image du point B par la fonction f .
 - c. Sur la copie, placer les points A, B, A' et B' dans le repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Pour les points B et B' , on laissera les traits de construction apparents.
2. Soit r un réel strictement positif et θ un réel. On considère le complexe z défini par $z = re^{i\theta}$.
 - a. Montrer que $z' = \frac{1}{r}e^{i(\pi-\theta)}$.
 - b. Est-il vrai que si un point M , distinct de O , appartient au disque de centre O et de rayon 1 sans appartenir au cercle de centre O et de rayon 1, alors son image M' par la fonction f est à l'extérieur de ce disque? Justifier.
3. Soit le cercle Γ de centre K d'affixe $z_K = -\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
 - a. Montrer qu'une équation cartésienne du cercle Γ est $x^2 + x + y^2 = 0$.
 - b. Soit $z = x + iy$ avec x et y non tous les deux nuls. Déterminer la forme algébrique de z' en fonction de x et y .
 - c. Soit M un point, distinct de O , du cercle Γ . Montrer que l'image M' du point M par la fonction f appartient à la droite d'équation $x = 1$.

Exercice 2

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n , par

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(1 + i \frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n.$$

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ de l'annexe 2. L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n .

1. a. Vérifier que $1 + i \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}}$.
- b. En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
2. a. Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}.$$

- b. Pour quelles valeurs de n , les points O , A_0 et A_n sont-ils alignés?
3. Pour tout entier naturel n , on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.
- a. Interpréter géométriquement d_n .
- b. Calculer d_0 .
- c. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i \frac{\sqrt{3}}{3}\right) (z_{n+1} - z_n).$$

- d. En déduire que la suite $(d_n)_{n \geq 0}$ est géométrique puis que pour tout entier naturel n ,

$$d_n = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n.$$

4. a. Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2.$$

- b. En déduire que, pour tout entier naturel n , le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n .
- c. Construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure de l'annexe 2 à rendre avec la copie.
- d. Justifier cette construction.*

