Approche historique

Le mot « matrice » vient du latin « mater » (mère). Comme on enregistrait les enfants à la naissance dans des registres, le mot désigna ces registres. Cela explique les mots « matricule » ou « immatriculation ». Au début de l'imprimerie, « matrice » désignait le moule à imprimer sur lequel on plaçait les caractères. Au IIe siècle av. JC, on trouve en Chine, dans *Les neufs chapitres sur l'art mathématique*, des tableaux de nombres utilisés pour résoudre des systèmes d'équations linéaires. C'est le même problème qui amène Bézout (1730-1783) et Vandermonde (1735-1796), deux mathématiciens français, à fournir des méthodes de résolutions dépendant des coefficients. Au milieu du siècle suivant les mathématiciens anglais Sylvester et Cayley comprennent l'importance de l'utilisation de tels tableaux. Le 1er leur donne le nom de *matrice* mais c'est le 2nd qui leur octroie un vrai statut en définissant des opérations. Cayley présente ces notions dans un mémoire publié en 1858 et dans lequel sont démontrés d'importants théorèmes.

Voyons quelques exemples concrets qui introduisent la notion de matrice :

Un commerçant vend des glaces durant l'été. Le tableau ci-dessous récapitule le nombre de glaces vendues au cours d'une journée.

Taille \ Type de glace	En cornet	En pot
Simple	50	20
Double	60	40
Triple	30	50

1 On peut résumer le tableau ci-dessus en ne conservant que les nombres. On obtient la matrice $A = \begin{pmatrix} 50 & 20 \\ 60 & 40 \\ 30 & 50 \end{pmatrix}$.
Elle contient 3 **lignes** et 2 **colonnes** ; on dit qu'elle est de **dimension** (ou de taille) (3, 2).
a) Écrire une matrice colonne B résumant les ventes de glaces en cornet. Préciser sa dimension.
b) Écrire une matrice ligne C résumant les ventes de glaces double. Préciser sa dimension.

2 Le commerçant constate une baisse de 10 % de ses ventes le lendemain.
Écrire la matrice D correspondant aux ventes du lendemain. On note $D = 0{,}9\,A$.

3 La matrice $A + D$ est obtenue en additionnant deux à deux les coefficients de A et D qui occupent la même position. Déterminer cette matrice, que représente-t-elle ?

✂--

I-Généralités sur les matrices

Définition

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

On appelle matrice à n lignes et p colonnes, tout tableau rectangulaire formé de n lignes de nombres complexes et de p colonnes de nombre complexes.

La taille de la matrice (ou encore son format, sa dimension) est notée : $n \times p$ (on n'effectue pas la multiplication !). Par exemple $\begin{pmatrix} 2 & 3,4 & -1 \\ 1,1 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes : son format est 2×3, on dira encore qu'on a une matrice de taille 2×3, ou encore une matrice 2×3.

Ces nombres réels contenus dans une matrice A sont appelés les coefficients de la matrice.

On les note a_{ij} avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, et a_{ij} désigne le coefficient situé à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ième}$ colonne.

On a donc : $A=$

Attention à l'ordre dans les indices : toujours le numéro de la ligne écrit en premier, et en second celui de la colonne où figure le coefficient.

- Une matrice formée d'une seule ligne est appelée matrice ligne.

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.

- Une matrice formée d'une seule colonne est appelée matrice colonne ou encore vecteur colonne.

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 \\ -0,5 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

Exercice 0

1) Soit A $=(a_{ij})$ la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Quel est sa taille ? en déduire les valeurs prises par i et j. A combien est égal son coefficient a_{31} ?

2) Soit B la matrice avec B $=(b_{ij})$, où $b_{ij} = 2ij^2$ pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq 3$ et tout entier j tel que : $1 \leq j \leq 2$.

Quel est la taille de cette matrice ? Ecrire la matrice B avec tous ses coefficients.

Définitions

Une matrice qui comporte ***autant de lignes que de colonnes*** est appelée une ***matrice carrée***.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de taille 2×2.

Pour les matrices carrées, au lieu de dire que la matrice est de taille $n \times n$, on dira simplement qu'elle est ***carrée d'ordre n.***

Pour une matrice carrée d'ordre n, les coefficients : $a_{11}, a_{22}, \ldots\ldots, a_{nn}$ forment ***la diagonale principale*** de la matrice.

Cette notion n'a de sens que pour les matrices carrées !

Illustration :

La matrice carrée d'ordre n, dont tous les coefficients de la diagonale principale valent 1, et les autres coefficients sont nuls est appelée matrice identité d'ordre n et notée I_n, on dit encore matrice unité d'ordre n.

__*Illustration*__ :

Par exemple, $I_2 = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$; $I_3 = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

__*Définition*__

Une matrice est nulle lorsque chacun de ses coefficients est égal à 0.

On notera O_n la matrice carrée d'ordre n afin d'éviter de confondre les objets manipulés. Avec un peu d'expérience on la notera O, à ne pas confondre avec le nombre zéro.

__*Remarque*__

Deux matrices A et B sont égales lorsqu'elles ont la *même taille,* ***et*** ont respectivement, à l'intersection de chaque ligne et de chaque colonne, ***les mêmes coefficients***.

Par exemple : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ si et seulement si :………………………………………………………..

__*Définition*__

On appelle matrice diagonale d'ordre n toute matrice carrée dont les éléments non situés sur la diagonale principale sont tous nuls.

__*Exemple*__ : D $= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 3, et D' $= \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 2.

Attention, E $= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice diagonale !!

__*II – Opérations sur les matrices*__

On généralise dans les paragraphes A et B ce qu'on a vu en introduction avec les glaces :

__*A-Somme de deux matrices de même taille*__

__*Définition*__ : Soit A $=(a_{ij})$ et B $= (b_{ij})$ deux matrices de ***__même taille__*** $n \times p$.

La somme de A et B, notée A+B, est la matrice de taille $n \times p$ définie par : A+B $=(c_{ij})$ avec : $c_{ij}=a_{ij} + b_{ij}$ pour tout entier i et j tels que : $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$.

Les coefficients de la matrice A+B s'obtiennent donc en ajoutant deux à deux les coefficients de même position des matrices A et B.

Clairement, A+B = B+A !! On dira que l'addition des matrices de même taille est commutative.

Exemple *: Si* A $=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et B $=\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$, alors A+B $=$

Attention, contrairement aux nombres réels, additionner deux matrices n'a de sens que si les deux matrices ont la même taille ! On ne peut donc pas additionner deux matrices quelconques entre-elles !

B- Multiplication d'une matrice par un réel

Soit A $=(a_{ij})$ une matrice de taille $n\times p$, et k un nombre réel.

Le produit de la matrice A par le réel k est la matrice notée $\boldsymbol{k}\mathbf{A}$ dont les coefficients sont obtenus en multipliant tous les coefficients de la matrice A par ce nombre k.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, alors : 2,5A $=$

Si B $= \begin{pmatrix} 2 & 3,4 & -1 \\ 1,1 & 8 & 5 \end{pmatrix}$, alors -2B $=$

Remarque : la matrice -1A, notée $-$A est appelée la matrice opposée de A.

En particulier, lorsque deux matrices ont la même taille, on définit la différence de deux matrices A et B, notée A $-$ B par : A $-$ B $=$ A $+$ (-B).

Exemple : Soit A $= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et B $= \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Déterminer les matrices suivantes : $C = A - B$; D $=$ 2A $-$ 3B.

✂---

Remarque : de façon triviale, si A et B sont deux matrices de même taille, pour tous réels k et ℓ on a :

$k(\ell A) = \ell\,(kA) = k\ell A$ et $k(A+B) = kA + kB$ et enfin : $(kA + \ell A) = (k + \ell)A$.

C-Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne

Exemple d'introduction

John veut construire des placards sur mesure dans plusieurs pièces de sa maison. Le tableau ci-dessous récapitule les quantités de matériel dont il a besoin.

	Planche de bois	Paquet de vis	Coulisse
Entrée	3	4	8
Cellier	1	2	4
Dressing	6	8	12

1) Ecrire la matrice B correspondant à ce tableau.
2) Chaque planche de bois coûte 20€, chaque paquet de vis coûte 5€, et chaque coulisse coûte 7€.

a) Ecrire la matrice P de taille 3×1 qui correspond aux prix des matériaux.

b) Calculer le coût total de fabrication des placards dans l'entrée, puis dans le cellier puis dans le dressing.

3) Retrouver les résultats précédents en effectuant le calcul B×P comme indiqué ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$B \times P = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ 6 & 8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 20 & + & 4\times 5 & + & 8\times 7 \\ \cdots & + & \cdots & + & \cdots \\ \cdots & + & \cdots & + & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 136 \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

✂--

Définition : Soit n un entier naturel non nul, $L = (a_{1j})$ une matrice ligne (de taille $1\times \boldsymbol{n}$) et C $=(b_{i1})$ une matrice colonne (de taille $\boldsymbol{n}\times 1$).

Alors on a : ♥♥ $\boldsymbol{L \times C} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ . \\ . \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}\times b_{11} + a_{12}\times b_{21} + \ldots + a_{1n}\times b_{n1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{k1}$ ♥♥

$\boldsymbol{L \times C}$ est donc une matrice formée d'une seule ligne et d'une seule colonne, à savoir un réel !

Exemple : Calculer : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

✂--

D- Multiplication de deux matrices

On admet que le *produit* de deux matrices A et B, que l'on notera AB, *n'existe que si* le *nombre de colonnes de A* est égal au *nombre de lignes de B.*

En règle générale, le produit de deux matrices quelconques n'existe donc pas !

Définition : n, p et q sont des entiers naturels non nuls.

Soit A une matrice de taille $n\times \boldsymbol{p}$ et B une matrice de taille $\boldsymbol{p}\times q$.

Le produit de A par B, noté A×B ou encore AB est la matrice de taille $n\times q$ dont le coefficient situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, est le produit, au sens de la définition du paragraphe C, de la ligne i de A par la colonne j de B, pour $1\le i\le p$ et $1\le j\le q$.

Autrement dit, en notant AB = C $=(c_{ij})$, on a : ♥♥ $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pi} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$ ♥♥.

Illustration :

✂--

Exemples

Soit A $=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et B $=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer AB. En général, pour calculer un produit de deux matrices, on utilise la disposition pratique suivante qui facilite la visualisation des opérations à effectuer :

Le produit de B par A existe-t-il ?

Soit $C = \begin{pmatrix} -3 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer CA.

✂---

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

Expliquer pourquoi AB existe et déterminer cette matrice.

Même question pour BA.

Quelle conclusion tirez-vous ?

✂---

Propriété du produit de matrices carrées

La multiplication de deux matrices carrées n'est pas ………………..
Autrement dit, il existe des matrices carrées A et B telles que AB ≠ BA.

Remarque : Si A est une matrice carrée d'ordre n, on notera $A^2 = A \times A$.

Plus généralement, pour tout entier naturel k non nul, on note A^k le produit de k matrices toutes égales à A :

On convient de poser, pour $k = 0$: $A^0 = I_n$.

Propriétés utiles en calcul matriciel

Soit A, B et C des matrices carrées d'ordre n, où $n \in \mathbb{N}^*$.

-La multiplication matricielle est associative : $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.

On note $A \times B \times C$ ce produit, ou encore ABC.

- La multiplication des matrices est distributive par rapport à l'addition :

$A \times (B+C) = A \times B + A \times C, et\ (A+B) \times C = A \times C + B \times C.$

-Soit I_n la matrice identité d'ordre n, ♥♥ $I_n \times A = A \times I_n = A$. ♥♥

Expliquons le dernier point qui sera très utilisé en pratique :

✂---

Attention à ne pas trop vite généraliser aux matrices les propriétés connues sur les nombres réels ou complexes :

Nous allons voir, au travers de contre-exemples, que certaines règles usuelles sur les nombres réels ou complexes ne sont plus vraies avec les matrices :

Calculer AB puis AC avec : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$. Conclusion ?

Cela montre que si ……………………..et A≠ 0_n, alors on ne peut pas en déduire que ………

En d'autres termes, on ne peut pas simplifier le produit matriciel sans condition supplémentaire sur la matrice A.

- Calculer AB lorsque : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Cela montre qu'il n'y a pas de théorème du produit nul pour les matrices : Si A et B sont deux matrices carrées, on peut avoir $AB = 0_n$ avec : $A \neq 0_n$ et $B \neq 0_n$.

- Pas d'identités remarquables avec les matrices :

Calculer $(A+B)^2$, puis A^2, B^2 et AB ainsi que : $A^2 + 2AB + B^2$ avec : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis conclure.

Donner la forme développée de $(A+B)^2$ dans le cas général.

<u>Exercice 2</u>

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer : A^2 ; A^3 ; A^4. Quelle conjecture émettez-vous pour A^n ?

Démontrer par récurrence que l'expression de A^n conjecturée est valide pour tout entier naturel n.

✂---

Propriété

Soit D une matrice diagonale d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors, pour tout entier naturel k, D^k est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont obtenus en élevant à la puissance k les éléments diagonaux de D situés à la même position.

Illustration :

Démonstration : Evident en raisonnant par récurrence sur k et en se souvenant de la règle du produit matriciel.

Exemple

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Donner D^2, D^3 et D^k avec k entier naturel.

Attention, la propriété établie ne s'applique qu'aux matrices diagonales !

Exercice 3

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Montrer que $M = P + I_3$ où P est une matrice que l'on déterminera.

Calculer P^2, puis en déduire la matrice M^2.

E- Calcul matriciel et calculatrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. On a : $A \times B = \begin{pmatrix} -11 & -13 \\ -13 & 1 \end{pmatrix}$

Voici les procédures selon les modèles calculatrices pour calculer le produit $A \times B$:

Commentaires	TI	Casio	NumWorks
• On saisit les coefficients des matrices	matrice ► ► (EDIT) entrer 2 entrer 2 entrer Taper les coefficients de A et entrer à chaque fois. quitter 2nde mode Recommencer pour entrer la matrice B.	MENU 1 F3 (►MAT/VCT) 2 EXE 2 EXE EXE Taper les coefficients de A et EXE à chaque fois. EXIT ▼ Recommencer pour entrer la matrice B. EXIT	Calculs EXE shift e^x A Taper les coefficients à l'aide des flèches de déplacements. Puis, juste après avoir saisi le dernier nombre, on nomme la matrice. ▷ ▷ shift sto→ x^y F shift alpha e^x A EXE Recommencer pour entrer la matrice B.
• On calcule A × B	matrice 1 ([A]) × matrice 2 ([B]) entrer	OPTN F2 (►MAT/VCT) F1 (Mat) A ALPHA X,θ,T × B F1 (Mat) ALPHA log EXE	shift alpha e^x A × shift alpha ln B EXE

On peut utiliser la calculatrice pour calculer des puissances n-ième, de matrice :

Par exemple, $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$.

__Exemple__ : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 7 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

Calculer à l'aide de votre machine : 5A + 3B, puis AB, puis BA puis A^4 puis $(2A - B)^3$.

__Exercice 4__

1) Soit a un nombre réel et M $= \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

a) Calculer M^2 puis M^3.

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $M^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$.

c) Soit la matrice N $= \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$. Exprimer N^n pour tout entier $n \geq 1$.

__III- Matrices inversibles et application à la résolution de systèmes d'équations.__

__1) Généralités__

Définition

Soit A une matrice carrée de d'ordre n.

On dit que A est une ***matrice inversible*** lorsqu'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que :

$\boldsymbol{A \times B = B \times A = I_n}$.

On dira dans ce cas que la matrice B est l'inverse de la matrice A, ce que l'on notera : $B = A^{-1}$.

On admet que si $AB = I_n$, alors $BA = I_n$. En pratique, pour prouver qu'une matrice carrée est inversible d'inverse B, il suffit d'établir que $\boldsymbol{A \times B = I_n}$ ou d'établir que $\boldsymbol{B \times A = I_n}$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ -2 & 1,5 \end{pmatrix}$.

Etablir que A est inversible d'inverse B.

Remarques

Sous réserve d'existence, l'inverse d'une matrice carrée donnée est ***unique*** et de même ordre que la matrice de départ. Pourquoi ?

Si A est inversible, A^{-1} est également une matrice inversible, et $(A^{-1})^{-1} = \ldots$.

Il existe des matrices non inversibles : la matrice nulle par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, pourquoi ?

✂---

Exercice 4 ***(important)***

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 puis $A^2 - 2A + 3I_2$. En déduire que A est inversible, et déterminer son inverse. Vérifier votre résultat en calculant à l'aide de la calculatrice A^{-1}.

✂---

Exercice 5

Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer B^2. La matrice B est-elle inversible ?

Propriété importante

A, B et C désignent des matrices carrées d'ordre n.

Si A=BC et si B est inversible, alors : C=....

Si A = CB et si B est inversible, alors : C =

Exercice 6

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n inversibles.

a) Calculer : $B^{-1} \times A^{-1} \times A \times B$. Qu'en déduisez-vous ?

b) De façon analogue, déterminer l'inverse de BA.

✂---

Propriété

A, M et N sont des matrices carrées de même ordre n. O_n est la matrice nulle de même ordre.

- Si A est inversible et si $AM = O_n$ alors $M = O_n$.
- Si A est inversible et si $AM = AN$ alors $M = N$.

Démonstration :

✂---

Exercice 7

Soit N une matrice carrée d'ordre n non nulle. On suppose qu'il existe un entier naturel p non nul tel que $N^p = O_n$. Démontrer que N n'est pas inversible.

✂---

2) Le cas des matrices carrées d'ordre 2 inversibles

Définition

Soit A une matrice carrée ***d'ordre* 2**. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a, b, c et d réels.

On appelle ***déterminant de la matrice A***, le nombre $\Delta = \boldsymbol{ad - bc}$.

On retiendra : Δ = produit des éléments diagonaux moins produit des deux autres coefficients de la matrice.

***Propriété* (*caractérisation des matrices carrées d'ordre 2 inversibles*)**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a, b, c et d réels.

A est inversible ***si et seulement si*** son déterminant est différent de 0.

Lorsque $\Delta \neq 0$, on a : $A^{-1} =$

Mnémo : ***A inversible*** $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{ad - bc \neq 0}$.

Preuve :

✂---

Exercice 8

1) Démontrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ est inversible, et calculer M^{-1}.

2) Dans des exemples antérieurs, on a vu, avec : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, que AB = AC. La matrice A est-elle inversible ? Ne pas utiliser le déterminant.

✂--

Remarque : La notion de déterminant s'étend à des matrices d'ordre $n \geq 3$, mais la relation qui permet de calculer ce dernier devient vite plus complexe dès que $n = 3$. Cela sera vu dans le cours de bac +1 des classes préparatoires.

En pratique, cette année, dans les exercices, si $n \geq 3$, on vous guidera pour prouver qu'une matrice est inversible, et sans aucune indication, on utilisera sa calculatrice pour en trouver l'inverse.

3) Application importante à la résolution de systèmes linéaires d'équations

Un exemple d'introduction :

Considérons le système suivant dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} 2x - 8y = 3 \\ 7x + 5y = 4 \end{cases}$ d'inconnues x et y.

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Trouver la matrice carrée A d'ordre 2 telle que : $AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On dit qu'on a écrit le système sous forme matricielle. L'inconnue est alors le vecteur colonne X.

Expliquer pourquoi A est inversible, puis montrer que $X = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, puis résoudre ce système.

✂--

Propriété

Tout système linéaire de n équations à n inconnues $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases}$

peut s'écrire matriciellement sous la forme : $AX = Y$, où $A = (a_{ij})$ est une matrice carrée d'ordre n formée par les coefficients du système et X et Y sont respectivement les vecteurs colonnes avec :

$$X = \begin{pmatrix} .. \\ .. \\ .. \\ .. \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} .. \\ .. \\ .. \\ .. \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

***Si A est inversible**, alors **le système admet une unique solution** donnée par :* ♥♥ $X =$ ♥♥

__Exemple d'utilisation__

Résoudre matriciellement le système suivant en s'aidant de sa calculatrice :

$$\begin{cases} 3x+2,4y+2z=8784 \\ 0,4x+0,2y+0,2z=973,6 \\ 0,4x+0,5y+0,8z=2174,8 \end{cases}.$$

✂---

Exercice 9

Pour tout réel x, soit f une fonction polynôme de degré 3.

On sait que la courbe représentative de f passe par les points : A(-1 ; -4,5), B(1 ; 0,5), C(2 ; -3) et D(5 ; -1,5).

En détaillant votre démarche, déterminer l'expression de $f(x)$.

✂---

Exercice 10

Soient (x_n) et (y_n) deux suites définies sur ℕ par : $\begin{cases} x_{n+1} = -2x_n + 4y_n \\ y_{n+1} = -5x_n + 7y_n \end{cases}$ et $\begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 2 \end{cases}$

1) Calculer les trois premiers termes de chacune de ces deux suites.
2) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice A telle que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$
3) En déduire l'expression de U_n en fonction de n, puis expliciter x_n et y_n.

Exercice 11

On donne les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Déterminer la matrice M^2. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$.
2. Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$.
3. En déduire que M est inversible et que $M^{-1} = \frac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I\right)$.

Partie B Étude d'un cas particulier

On cherche à déterminer trois nombres entiers a, b et c tels que la parabole d'équation
$y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A(1 ; 1), B(−1 ; −1) et C(2 ; 5).

1. Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers a, b et c tels que

$$M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer les nombres a, b et c et vérifier que ces nombres sont des entiers.

Partie C Retour au cas général

Les nombres a, b, c, p, q, r sont des entiers.
Dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A$(1\,;\,p)$, B$(-1\,;\,q)$ et C$(2\,;\,r)$.
On cherche des valeurs de p, q et r pour qu'il existe une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par A, B et C.

1. Démontrer que si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ avec a, b et c entiers, alors

$$\left\{\begin{array}{lcl} -3p+q+2r & \equiv & 0\,[6] \\ 3p-3q & \equiv & 0\,[6] \\ 6p+2q-2r & \equiv & 0\,[6] \end{array}\right.$$

2. En déduire que $\left\{\begin{array}{lcl} q-r & \equiv & 0\,[3] \\ p-q & \equiv & 0\,[2] \end{array}\right.$.

3. Réciproquement, on admet que si $\left\{\begin{array}{lcl} q-r & \equiv & 0\,[3] \\ p-q & \equiv & 0\,[2] \\ \multicolumn{3}{l}{\text{A, B, C ne sont pas alignés}} \end{array}\right.$

alors il existe trois entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A, B et C.

a. Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $2r + q - 3p = 0$.

b. On choisit $p = 7$. Déterminer des entiers q, r, a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A, B et C.

IV-Matrices diagonalisables et applications

Définition

Soit M une matrice carrée d'ordre q.

♥♥ On dit que M est diagonalisable lorsqu'il existe une ***matrice inversible P*** et une ***matrice diagonale D*** d'ordres q telles que : $M = PDP^{-1}$♥♥.

__Exemple 1__

Soit M $= \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ 30 & -12 \end{pmatrix}$. Montrer que M $=$ PDP^{-1}, avec P $= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et D $= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En déduire que M est diagonalisable.

✂---

__Propriété__

Si M est une matrice diagonalisable, avec M $=$ P D P^{-1}, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = \mathrm{P}\, D^n\, \mathrm{P}^{-1}$

__Démonstration__ :

En reprenant l'exemple 1 précédent, déterminer D^npour entier naturel n

__Exemple 2__

On considère T la matrice carrée d'ordre 2 définie par T $= \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$

1) A l'aide de votre calculatrice, vérifier que T $=$ PDQ, où P $= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, D = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et Q = $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
2) En déduire que T est diagonalisable, puis déterminer, pour tout entier naturel n, T^n.

✂---

__Application à l'étude de suites récurrentes__

__a) Définition et propriété__

Soit A une matrice carrée d'ordre p, et U_0 une matrice colonne à p lignes.

La suite (U_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{AU}_n$, est appelée ***une suite récurrente matricielle.***

__Propriété__ : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{U}_n = A^n\mathrm{U}_0$.

__Preuve__ :

✂---

__Exemple__

Soient (x_n) et (y_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} x_{n+1} = -7x_n + 6y_n \\ y_{n+1} = -18x_n + 14y_n \end{cases}$ et $\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{cases}$

1) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice A telle que : $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{AU}_n$.

2) Soient P = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, D = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et Q = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

a) Vérifier que A $=$ PDQ.
b) En déduire que A est diagonalisable.
c) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de, A^n puis U_n puis x_n et y_n en fonction de n.

✂---

Exercice 12

Une agence de voyage a repéré que :

- 75 % des personnes ayant voyagé en France renouvellent leur souhait de voyager de nouveau en France l'année d'après (25 % des gens décident au contraire de voyager à l'étranger l'année d'après)
- 85 % des gens voyageant à l'étranger décident de partir de nouveau à l'étranger l'année d'après (comme 15 % qui décident de voyager en France l'année d'après).

L'agence de voyage avait la saison dernière (en 2022), 1 700 personnes voyageant en France et 300 personnes voyageant à l'étranger.

Soit (a_n) la suite modélisant le nombre de voyageurs à destination de la France et (b_n) la suite modélisant le nombre de voyageurs à destination de l'étranger l'année $2022+n$.

Soit (U_n) la suite définie, pour tout entier naturel n par : $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

On a donc : $a_0 = 1700$, $b_0 = 300$, et donc, $U_0 = \begin{pmatrix} 1700 \\ 300 \end{pmatrix}$

1) Déterminer la matrice A telle que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$.
2) Déterminer à l'aide de la calculatrice, le nombre de voyageurs prévus à destination de la France et à destination de l'étranger pour les saisons 2023, 2024, 2040.

✂---

Exercice 13

Dans une région, on s'intéresse à la cohabitation de deux espèces animales : les campagnols et les renards, les renards étant les prédateurs des campagnols.
Au 1er juillet 2012, on estime qu'il y a dans cette région approximativement deux millions de campagnols et cent-vingt renards.

On note u_n le nombre de campagnols et v_n le nombre de renards au 1er juillet de l'année $2012+n$.

Partie A - Un modèle simple

On modélise l'évolution des populations par les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 1,1u_n - 2000v_n \\ v_{n+1} & = & 2\times 10^{-5}u_n + 0,6v_n \end{array}\right. \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 0 \text{, avec } u_0 = 2000000 \text{ et } v_0 = 120.$$

1. **a.** On considère la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Déterminer la matrice A telle que $U_{n+1} = A \times U_n$ pour tout entier n et donner la matrice U_0.

b. Calculer le nombre de campagnols et de renards estimés grâce à ce modèle au 1er juillet 2018.

2. Soit les matrices $P = \begin{pmatrix} 20000 & 5000 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{15000}\begin{pmatrix} 1 & -5000 \\ -1 & 20000 \end{pmatrix}$.

On admet que P^{-1} est la matrice inverse de la matrice P et que $A = P \times D \times P^{-1}$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$.

b. Donner sans justification l'expression de la matrice D^n en fonction de n.

c. On admet que, pour tout entier naturel n :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_n & = & \dfrac{2,8\times 10^7 + 2\times 10^6 \times 0,7^n}{15} \\ v_n & = & \dfrac{1400 + 400 \times 0,7^n}{15} \end{array}\right.$$

Décrire l'évolution des deux populations.

Exercice 14

Une ville possède un réseau de vélos en libre service dont deux stations A et B se situent en haut d'une colline. On admet qu'aucun vélo des autres stations n'arrive en direction des stations A et B.

On constate pour chaque heure n qu'en moyenne :
- 20 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station A sont toujours à cette station.

60 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station A sont à la station B et les autres sont dans d'autres stations du réseau ou en circulation.
- 10 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station B sont à la station A, 30 % sont toujours à la station B et les autres sont dans d'autres stations du réseau ou en circulation.
- Au début de la journée, la station A comporte 50 vélos, la station B 60 vélos.

Partie A

Au bout de n heures, on note a_n le nombre moyen de vélos présents à la station A et b_n le nombre moyen de vélos présents à la station B. On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et donc $U_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice M telle que $U_{n+1} = M \times U_n$.
2. Déterminer U_1 et U_2.
3. Au bout de combien d'heures reste-t-il un seul vélo dans la station A ?

Partie B

Le service décide d'étudier les effets d'un approvisionnement des stations A et B consistant à apporter après chaque heure de fonctionnement 30 vélos à la station A et 10 vélos à la station B.
Afin de conduire cette étude, il décide de modéliser la situation présente de la manière suivante :

Au bout de n heures, on note α_n le nombre moyen de vélos présents à la station A et β_n le nombre moyen de vélos présents à la station B. On note V_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions $V_{n+1} = M \times V_n + R$ avec $R = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$.

1. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N la matrice $I - M$.
   - **a.** On désigne par V une matrice colonne à deux lignes.
     Montrer que $V = M \times V + R$ équivaut à $N \times V = R$.
   - **b.** On admet que N est une matrice inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,2 \\ 1,2 & 1,6 \end{pmatrix}$.

     En déduire que $V = \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}$
2. Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = V_n - V$.
   - **a.** Montrer que $W_{n+1} = M \times W_n$.
   - **b.** On admet que : – pour tout entier naturel n, $W_n = M^n \times W_0$,

     – pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $M^n = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$.

     Calculer, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, V_n en fonction de n.
   - **c.** Le nombre moyen de vélos présents dans les stations A et B a-t-il tendance à se stabiliser ?